République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique


**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**


Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par


**BEKHOUCHE Ibtissam**


Titre :

# Courbes et surfaces différentiable

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | REZKI BRAHIM | UMKB | Président |
| Dr. | HOUAS AMRANE | UMKB | Encadreur |
| Dr. | TABARHA OUARDA | UMKB | Examinateur |

Juin 2018

## Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mon cher pére et ma chére mére

Mon frére  Massinissa et Mes soeurs

toute mma famille et Toute mes amies

A mes collégues de mathématiques 2017-2018

A toutes personnes que j'ame, je dédie ce modeste mémoire de fin d'étude.

**Ibtissam**

## REMERCIEMENTS

En préambule àce mémoire, je tiens à remercier ALLAH qui m'aidé et ma donné la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à remercier sincérement mon encadreur "**Dr.HOUAS Amrane**" pour ses précieuux conseils et son orientation tout au long de notre recherche.

Mes précieux remerciements vont au président et mombres de jury : "**Dr.REZKI Brahim**" et "**Dr.TABARHA Ouarda**" pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger mon travail.

Tout mes reconnaissances et remerciements distingué s'adressent à notre chef de département de mathématiques "**Dr.HFAYD Mkheter**" et à tout les enseignants de département de mathématiques de l'université Mohamed Khider Biskra.

**Merci à Tout**

# Table des matières

# Table des figures

# Introduction

La géométrie est la branche des mathématiques qui étudie les formes et les figures dans l'espace, leurs relations entre elles et leurs propriétés.

Il ya la géométrie analytique ayant recours avec le calcul algébrique et analytique ; elle facilite l'étude des propriétés géométriques des courbes et des surfaces et leur représentation géométrique.

Il ya aussi la géométrie différentielle qui étude les proprités locales ( au voisinage d'un point ) et intrinsèques des courbes et des surfaces.

L'un des applications de la géométrie différentielle est la géodisie qui étudie la forme de la terre et dans ce but elle substitue a la surface topographique des surfaces plus ou moins réguliéres. Dans ce mémoire on va étudier les courbes et les surfaces differentiables. Il est composé de trois chapitres, dans le premier chapitre nous étudions les courbes paramétrées ( absisse curviligne, repère de Frénét, propriétés métriques,...), dans le deuxiéme on s'interesse au surfaces paramétrées ( surface régulier, éléments différentielle, ...)

En fin, le troisiéme chapitre est consacré à l'étude de l'intégrale curvilligne et ces propriétées

# Chapitre 1

# Courbes paramétrées

## 1.1 Généralités

Une courbe dans l'espace de dimension $n$ est un objet qui peut être décrit par un point qui évolue au cours du temps. Autrement dit, il suffit d'un paramètre pour le décrire, le temps. On dit d'un tel objet qu'il est 1-dimensionnel. Le fait de décrire une courbe par un paramètre qui évolue revient à considérer une application $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Quand le paramètre $t$ parcourt l'intervalle $I$, le point $r(t)$ parcourt la courbe. Une telle application $r$ est une courbe paramétrée. On se concentre ici sur l'étude des courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

## 1.2 Préliminaire

Nous utiliserons les notations usuelles des ensembles classiques nous notons donc $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ les ensembles des nombres naturels, entiers et réels, ceci implique que, pour $n \in \mathbb{N}$, nous avons la notation :

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \, / x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Par ailleurs, l'ennsemble $\mathbb{R}^n$ est considéré avec l'addition de la multiplication avec des nombres reéls, auterement dit, pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et $k \in \mathbb{R}$, nous définissons :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \quad kx = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

Certains point seront spécifés :

$$e^1 = (1, 0, 0 \ldots, 0), \quad e^2 = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots \quad , \quad e^n = (0, 0, 0 \ldots.., 1)$$

Nous considérons le produit scalaire standard :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ainsi que la norme et la distance induites par ce produit scalaire :

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad dist\,(x, y) = \|x, y\|$$

Nous rapplons aussi la définition du produit exterieur dans $\mathbb{R}^3$, pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2\ y_3 - x_3\ y_2, x_3\ y_1 - x_1\ y_3, x_1\ y_2 - x_2\ y_1)$$

## 1.3 Définitions

**Définition 1.3.1** *Une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^n$ est une application*

$$r : \quad I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto r\,(t) = (r_1\,(t)\,, r_2\,(t)\,, \ldots.., r_n\,(t))$$

*Où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle non dégénéré et les composantes $r_i\,(i = 1...n)$ sont des fonctions continues :*

$$r_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble $C = r\,(I) = \{r\,(t) : t \in I\}$ est appelé le support géométrique de $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que $C$ est une courbe géométrique et que $r\,(t)$ est une paramétrisation de $C$. Si $n = 2$ : la courbe $r$ est plane. Si $n = 3$ : la courbe $r$ est gauche.

**Remarque 1.3.1** *On dit que $C$ est une courbe géométrique et que $r$ est une paramétrisation de $C$*

la courbe paramétrée comporte plus d'information que la courbe géometrique

**Exemple 1.3.1**

$$\begin{aligned} r &: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow r\,(t) = (\cos(t)\,, \sin(t))\,, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

*$r$ est une courbe plane $r_1\,(t) = \cos(t)$, $r_2\,(t) = \sin(t)$, $r\,(0) = (1, 0)$, $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.*

**Exemple 1.3.2** *Le support géométrique de la courbe paramétrée $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $r\,(t) = (k\cos(t)\,, k\sin(t)\,, t)\,,\ k > 0$ est une hélice*

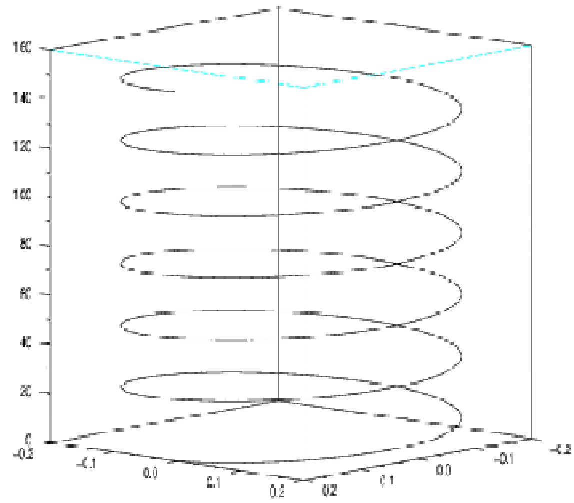

FIGURE 1.1 – Courbe gauche : une hélice

## 1.4 Types des courbes

### 1.4.1 Courbe simple

Une courbe est dite simple si elle ne se recoupe pas, autrement dit, si

$$\forall (t_1, t_2) \in I^2, t_1 \neq t_2 \Longrightarrow r(t_1) \neq r(t_2)$$

**Exemple 1.4.1** *La courbe* $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$ *avec* $r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *est une courbe simple*

### 1.4.2 Courbe fermée

Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Soit $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée telle que $r(a) = r(b)$. On dit dans ce cas que $C = r([a, b])$ est une courbe fermée.

**Remarque 1.4.1** *Une courbe simple est donc une courbe qui ne s'auto-intersecte pas, en d'autres termes la trajectoire ne se recoupe pas (sauf éventuellement si la courbe est* *fermée, auquel cas le seul point de recoupement est le point de départ qui est identique au point d'arrivée)*

## 1.5 Courbes régulières et espace tangent

### 1.5.1 Courbes régulières et point (réguliers,biréguliers)

**Définition 1.5.1** *Le point $r(t_0)$ est dit régulier si $r'(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$*

La courbe paramétrée $r$ est reguliére si tout point de $r(I)$ est régulier.

**Définition 1.5.2** *Le point $r(t_0)$ est dit birégulier si $r'(t_0)$ et $r''(t_0)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$*

La courbe paramétrée $r$ est birégulier si tout point de $r(I)$ est birégulier.

**Définition 1.5.3** *Le point $r(t_0)$ est dit singulier si $r'(t_0) = 0$.*

**Remarque 1.5.1** *Si $r : I \to \mathbb{R}^n$ est régulière et si $\tilde{r} = ro\varphi$ est une reparamétrisation de $r$ donc $\tilde{r}$ est régulière. En effet ona : $\tilde{r}'(t) = r'(\varphi(t))\varphi'(t) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$*

### 1.5.2 Tangent

La tangente en un point $r(t_0)$ à une courbe paramétrée $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la limite des droites passant par $r(t)$ et $r(t_0)$ quand $t$ tend vers $t_0$.

**Définition 1.5.4** *Le vecteur tangent $\vec{v}_0$ à la courbe $r$ en $r(t_0)$ est donné par*

$$\vec{r}(t_0)\vec{r}(t) = \lambda(t)\vec{v}_0 + \lambda(t)\varepsilon(t)$$

$$\underline{avec} : \left[\lambda(t) \in \mathbb{R}, \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0,0)\right]$$

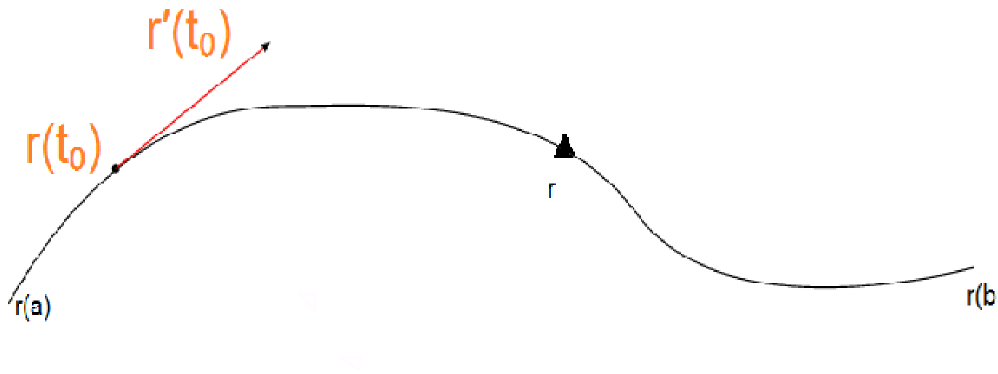


FIGURE 1.2 – Tangente à une courbe paramétrée

La droite passant par $r(t_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}_0$ est alors appelée la droite tangente à $r$ en $r(t_0)$

**Proposition 1.5.1** *Soit $r : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe $C^1$Si $r'(t_0) \neq 0$ alors $r'(t_0)$ est un vecteur tangent à la courbe $r$ en $r(t_0)$.*

**Preuve.** Comme r est de classe $C^1$

ona

$$r(t) = r(t_0) + (t - t_0) r'(t_0) + (t - t_0) \varepsilon(t) \qquad et \qquad \lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$$

alors

$$r(t) - r(t_0) = (t - t_0) r'(t_0) + (t - t_0) \varepsilon(t)$$

Supposons que : $\lambda(t) = (t - t_0)$

Donc :

$$\vec{r}(t_0)\, \vec{r}(t) = \lambda(t) r'(t_0) + \lambda(t) \varepsilon(t)$$

Donc : $r'(t_0)$ est un vecteur tangent à la courbe $r$ en $r(t_0)$. ∎

**Remarque 1.5.2** *Une courbe paramétrée réguliére admet une tangente en tous points, la récipoque n'est pas toujours vraie.*

**Exemple 1.5.1** *Soit* $r(t) = (t^2, t^4)$ *avec* $t \in \mathbb{R}$

*Nous remarquons que :* $x = t^2$ ; $y = t^4 \Longrightarrow y = x^2$ *équation pour la parabole admet une tangente en point* $(0,0)$ *mais* $r\prime(0) = (0,0)$ *donc pas réguliére.*

**Définition 1.5.5** *Demi-tangentes*

*Soit* $f : I \to E$ *une application continue et de classe* $C^1$ *par morceaux sur* $I$ *et soit* $t_0 \in I$ *et* $M_0 = f(t_0)$, *si* $f'_d(t_0)$ *(dérivée à droite de* $f$ *en* $t_0$*) est non nulle, la demi-droite :*

$$T_d = \left\{ f(t_0) + k f'_d(t_0), k \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

*est une demi-tangente à droite en* $M_0$.

**Remarque 1.5.3** *On définie de même facon la demi-tangente à gauche.*

## 1.6 Longueur d'une courbe

Pour mesurer la longueur d'une courbe, il existe une solution naturelle, elle se base d'approcher cette longueur par le long de la ligne polygonale de sommets sur la courbe. Lorsque la distance est réduite entre deux têtes consécutives, La longueur de la ligne polygonale sera incliné vers la longueur de la courbe.

**Définition 1.6.1** *La longueur d'une courbe paramétrée* $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *est donnée par :*

$$Long(r) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \parallel r(t_i + 1) - r(t_i) \parallel ; n \in N^*, a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b \right\}$$

$\cdot$ $Long(r)$ *est fini* $(Long(r) < +\infty)$ *on dit que* $r$ *est rectifiable .*

**Théorème 1.6.1** *Soit* $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée de classe* $C^1$ *alors* $r$ *est rectifiable et on a :*

$$Long(r) = \int_a^b \parallel r'(t) \parallel dt$$

**Exemple 1.6.1** *La longueur de l'hélice paramétrée par* $r(t) = (k\cos(t), k\sin(t), t)$, $k \succ 0$ *avec* $r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est donnée par :*

$$Long(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{k^2+1}dt = 2\pi\sqrt{k^2+1}$$

*Parce que :* $\left[r\prime(t) = (-k\sin t, k\cos t, 1) \Rightarrow \parallel r'(t) \parallel = \sqrt{k^2+1}\right]$.

**Proposition 1.6.1** *La longueur d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi.*

**Preuve.** Soit $r$ une courbe et $r_1 : I \to R^n$ , $r_2 : I \to R^n$ deux paramétrages de $r$ Il existe un reparamétrage $\varphi : J \to I$ tel que $r_2 = r_1 \circ \varphi$

$$Long(r_2) = \int\limits_J \parallel r_2'(t) \parallel dt = \int\limits_I \parallel r_1'(\varphi(t)) \parallel \varphi'(t)\,dt = \int\limits_I \parallel r_1'(s) \parallel ds = Long(r_1).$$

■

## 1.7 Abscisse curviligne

En géométrie différentielle, l'abscisse curviligne est une sorte de variante algébrique de la longueur d'un arc. On se donne une origine à partir de laquelle on calcule les longueurs, en les munissant d'un signe pour se situer de façon bien déterminée sur la courbe : à telle distance avant ou après le point initial. L'abscisse curviligne est donc l'analogue, sur une courbe, de l'abscisse sur une droite orientée.

**Définition 1.7.1** *Soit* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une courbe paramétrée de classe* $C^1$*et* $t_0 \in I$*. L'abscisse curviligne à partir du point de paramètre* $t_0$ *est la fonction* $S : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *donnée par :*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \parallel r'(v) \parallel dv \qquad ,\forall t \in I$$

**Définition 1.7.2** *Une paramétrisation* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *d'une courbe géométrique est dite normale (ou par abscisse curviligne) si pour tout* $[t_1, t_2] \subset I$ *la longueur de la courbe* *géométrique entre les points* $r(t_1)$ *et* $r(t_2)$ *est exactement* $(t_2 - t_1)$

$$Long\left(r_{[t_1,t_2]}\right) = t_2 - t_1$$

**Remarque 1.7.1** *L'abscisse curviligne* $s\,(t)$ *de la courbe géométrique* $r\,(I)$ *est la longueur de la courbe entre les point* $r\,(t_0)$ *et* $r\,(t)$ *.*

**Remarque 1.7.2** *Toute courbe parametrée réguliére* $(\forall t \in I, r'\,(t) \neq 0)$ *de classe* $C^1$ *peut être paramétrie par l'abscisse curviligne.*

**Théorème 1.7.1** *Soient* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une courbe paramétrée régulière de classe* $C^1$ *et* $t_0$ $\in I$ *alors l'abscisse curviligne* $s^{-1} : J \to I$ *est un changement de variable admissible et* $\tilde{r} = ros^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ *est une paramétrisation normale qui a le même support géométrique que* $r$*.*

**Exemple 1.7.1** *Soit la courbe* $r : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par :* $t \longrightarrow r\,(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$
*L'abscisse curviligne est :*

$$\begin{aligned} s\,(t) &= \int_{t_0}^{t} \parallel r'\,(v) \parallel dv \\ &= \int_{t_0}^{t} \parallel (1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}) \parallel dv \\ &= \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 + \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dv \\ s\,(t) &= \arcsin(t) \end{aligned}$$

*La fonction* $\arcsin : ]0,1[ \longrightarrow \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *est une bijection. La reparamétrisation* $\tilde{r} = ros^{-1}$ *:* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \to$

$\mathbb{R}^2$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\tilde{r}\left(s\right) &= r\left(\sin s\right) \\
&= \left(\sin s, \sqrt{1-\sin^2\left(s\right)}\right) \\
&= \left(\sin s, \sqrt{1-\sin^2\left(s\right)}\right) \\
\tilde{r}\left(s\right) \quad &= \left(\sin\left(s\right), \cos\left(s\right)\right)
\end{aligned}$$

# Chapitre 2

# Surfaces paramétrées

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1** *Une surface paramétrée de classe* $C^k$ $(k \geq 1)$ *est une application de classe* $C^k$ $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *Où* $U$ *est un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *(ouvert connexe de* $\mathbb{R}^2$*). L'ensemble*

$$S = f(U) = \{f(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)), (u_1, u_2) \in U\}$$

*est appelé le support géométrique de la surface paramétrée* $F : U \to \mathbb{R}^3$.

**Exemple 2.1.1** *Le cylindre, la sphére et l'hélicoide dans* $\mathbb{R}^3$*sont paramétrés respectivement par les fonctions*

$$\phi(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, u_2), u_1 \in [0, 2\pi[, u_2 \in I \subset R$$

$$\varphi(u_1, u_2) = (r \cos u_1 r \sin u_2, r \sin u_1 \sin u_2, r \cos u_2), u_1 \in [0, 2\pi[, u_2 \in [0, \pi[$$

$$\psi(u_1, u_2) = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, u_2), (u_1, u_2) \in U \in \mathbb{R}^2$$

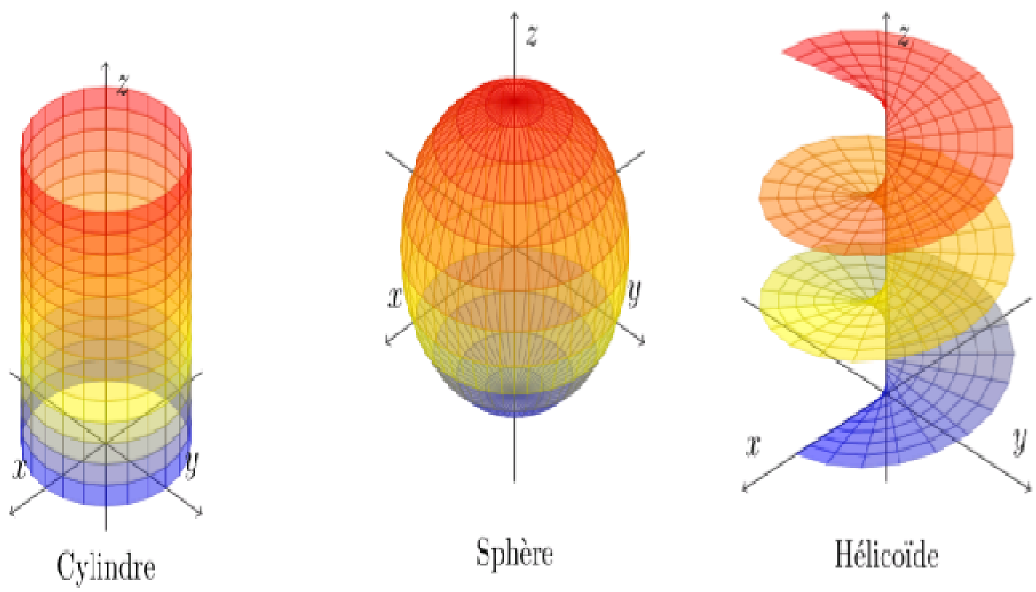


FIGURE 2.1 – Exemples de surfaces

**Définition 2.1.2** *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f : u_1 \times u_2 \to \mathbb{R}^3$, un reparamétrage de $S$ est une nouvelle paramétrisation $g : v_1 \times v_2 \to \mathbb{R}^3$ de $S$ obtenue en composant $f$ avec un difféomorphisme*

$$\varphi : v_1 \times v_2 \to u_1 \times u_2 \quad ie \quad g = fo\varphi$$

*Les nouveaux paramètres sont*

$$(v_1, v_2) = \varphi^{-1} (u_1, u_2)$$

**Exemple 2.1.2** *Soit $S$ la surface paramétrée par :*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longrightarrow f (u, v) = (\exp v, (u - v) \exp (-v) , u - v)$$

l'application

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$
$$(u, v) \longrightarrow \varphi^{-1}(u, v) = (u - v, \exp v) = (a, b)$$

est un difféomorphisme avec réciproque

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a, b) \longrightarrow \varphi(a, b) = (a + \ln a, \ln b)$$

donc l'application

$$g = fo\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(a, b) \longrightarrow g(a, b) = f(a + \ln a, \ln b) = \left(a, \frac{a}{b}, a\right)$$

est un reparamétrage de $S$.

## 2.2 Courbes sur une surface

**Définition 2.2.1** *Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface parametrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$,une courbe paramétrée sur $S$ est une courbe paramétrée $r : I \longrightarrow S$ obtenue en composant $f$ avec unr paramétrisation $\tilde{r} : I \longrightarrow U \times V$ des paramétres, que l'onnote $\tilde{r}(t) = (u(t), v(t))$ :*

$$r(t) = f(u(t), v(t)) \qquad , \forall t \in I\ .$$

## 2.3 Surfaces réguliére et espace tangent

**Définition 2.3.1** *On dit que la surface $S$ paramétrée par $H : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est réguliére en $(u_0, v_0) \in U \times V$ si les vecteurs dériveés partielles de $H$ en $(u_0, v_0)$, qu' on note*

$$H_u(u_0, v_0) \frac{\partial H(u_0, v_0)}{\partial u}, \quad H_v(u_0, v_0) = \frac{\partial H(u_0, v_0)}{\partial v}$$

*sont linéairement independants (et dounc non nuls) ; ie si leur prouduit vectoriel est non nul :*

$$H_u(u_0, v_0) \wedge H_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

**Définition 2.3.2** *La surface paramétrée $H : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite singuliére en $(u_0, v_0)$ au point $(u_0, v_0)$ si les deux vecteurs $\partial_u H(u_0, v_0)$ et $\partial_v H(u_0, v_0)$ sont linéaitrement dependants, ie si*

$$H_u(u_0, v_0) \wedge H_v(u_0, v_0) = 0$$

.

**Exemple 2.3.1** *La surface paramétré par $f(u, v) = (u^2, v^2, uv) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$ , est singuliére en $(0, 0)$, car*

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_u f(u, v) = (2u, 0, v) \\ et \\ \partial_v f(u, v) = (0, 2v, u) \end{array} \right. \Longrightarrow (\partial_u f \wedge \partial_v f)(u, v) = \left(-2v^2, -2u^2, 4uv\right)$$

*donc le vecteur $(\partial_u f \wedge \partial_v f)(u, v)$ s' annulle en $(0, 0)$.*

**Exemple 2.3.2** *Le graphe d'une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donne une surface $S$ paramétreé par*

$$f(u, v) = (u, v, h(u, v)) \qquad avec \qquad (u, v) \in D_h \in \mathbb{R}^2$$

*si $h$ est de classe $C^1$ ,la surface $S$ est réguliére par tout :*

$$\begin{cases} \partial_u f(u,v) = (1,0,\partial_u h(u,v)) \\ \quad et \\ \partial_v f(u,v) = (0,1,\partial_v h(u,v)) \end{cases} \Rightarrow (\partial_u f \wedge \partial_v f)(u,v) = (-\partial_u h(u,v), -\partial_v f(u,v), 1) \neq \vec{0}.$$

**Définition 2.3.3** *Soit $S$ une surface paramétrée par $f : u \times v \longrightarrow \mathbb{R}^3$, et soit $m_0 = f(u_0,v_0)$ un poit régulier de $S$ on appelle :*

$*$***Plan tangent*** *à $S$ un point $m_0$ le plan en gendré par les vecteurs $\partial_u f(u_0,v_0)$ et $\partial_v f(u_0,v_0)$ et passant par $m_0$*

$$T_{m_0}S = m_0 + vect(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0))$$
$$T_{m_0}S = \{f(u_0,v_0) + \lambda \partial_u f(u_0,v_0) + \mu \partial_v f(u_0,v_0) \ / \lambda, \mu \in R\}$$

$*$***Vecteur normale (***unitaire***)*** *de sen $m_0$ le vecteur*

$$N_S(u_0,v_0) = \frac{\partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0)}{\| \partial_u f(u_0,v_0) \wedge \partial_v f(u_0,v_0) \|}$$

*Le plan tangent à $S$ en $(u_0,v_0)$ contient la droite tangente à toutes les courbes réguliéres sur $S$ passant par $f(u_0,v_0)$, en effet, si $r(t) = f(u(t),v(t))$ est une telle courbe, et $(u_0,v_0) = (u(t_0),v(t_0))$*

*On a*

$$r\prime(t_0) = \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial x} u\prime(t) + \frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial y} v\prime(t) \in vect(\partial_u f(u_0,v_0), \partial_v f(u_0,v_0))$$

.

**Remarque 2.3.1** *Par definition, les trois vecteurs* $(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0), N_S(u_0, v_0))$ *forment une base directe de l'espace au-dessus du point* $f(u_0, v_0)$ *de la surface ( c'est -à-dire un repére mobile ) mais cette base n'est ni orthogonale ni normale.*

**Définition 2.3.4** *L' espace tangent à une surface paramétrée* $f : U \to \mathbb{R}^3$ *au point* $m_0 = f(u_0, v_0)$ *est l'espace affine noté* $T_{m_0}S$ *(avec* $S = f(U \times V)$*) passant par* $m_0$ *et engendré par les vecteurs*

$$\frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} et \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v}$$

-En pratique, l'espace tangent $T_{m_0}S$ désigne aussi l'espace vectoriel qui dirige l'espace affine défini ci-dessus à savoir donc l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial u}$ et $\frac{\partial f(u_0,v_0)}{\partial v}$.

## 2.4 Longueur et aire

**Définition 2.4.1** *Prenons une surface paramétrée* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *de classe* $C^1$ *et* $r : [a, b] \subset \mathbb{R} \to U$ *une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des paramètres* $U$*. Alors* $f \circ r$ *est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support* $S = f(U)$*. Sa longueur est donnée par :*

$$Long(f \circ r) = \int_a^b \| (f \circ r)'(t) \| dt$$
$$Long(f \circ r) = \int_a^b \| Df(r(t)) .r'(t) \| dt$$

**Proposition 2.4.1** *Soit* $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *une surface paramétrée régulière de classe* $C^1$*, alors l'intégrale :*

$$\int\limits_U \| \frac{\partial g}{\partial a}(a, b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a, b) \| dudv$$

*ne dépend pas de la paramétrisation.*

**Définition 2.4.2** *L'aire de la surface $S = g(U \times V)$ paramétrée par $g : U \times V \to \mathbb{R}^3$ est :*

$$Air(S) = \int_U \int_V \| \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \| dudv$$

**Exemple 2.4.1** *Soit* $g : [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[ \to \mathbb{R}^3$ *paramétré par :*

$$g(a,b) = \begin{pmatrix} (k + r\cos x)\cos y \\ (k + r\cos x)\sin y \\ r\sin x \end{pmatrix}$$

*L'aire de cette surface est donée par :*

$$\begin{aligned} Aire(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \| \frac{\partial g}{\partial a}(a;b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a;b) \| dadb \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\ r(k + r\cos a)\ |\ dadb \\ &= \int_0^{2\pi} (2\pi k r)\, db \\ &= 4\pi^2 r k. \end{aligned}$$

**Lemme 2.4.1** *Le nombre $Aire(S)$ ne depend pas de la parametrisation choisie.*

**Preuve.** Soit $g : A \times B \to \mathbb{R}^3$ une autre paramétrisation réguliére et bijective de $S$, et soit $\varphi = g^{-1} o f : U \times V \to A \times B$ le diffeomrphisme qui donne le changement de paramétres $\varphi(u,v) = (a,b)$

$$\begin{aligned} df_{(u,v)} &= dg_{(a,b)} o d\varphi_{(u,v)} \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \right) du + \left( \frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b) \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \right) dv \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\frac{\partial a}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\frac{\partial b}{\partial u}(u,v)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial a}(a,b)\frac{\partial a}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\frac{\partial b}{\partial v}(u,v)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\frac{\partial b}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\right)\frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)$$

et donc

$$\begin{aligned}\int\int_{U\times V} \|\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\|dudv &= \int\int_{U\times V} \|\det d\varphi_{(u,v)}\| \|\frac{\partial g}{\partial a}\varphi(u,v) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}\varphi(u,v)\|dudv \\ &= \int\int_{A\times B} \|\frac{\partial g}{\partial a}(a,b) \wedge \frac{\partial g}{\partial b}(a,b)\|dadb.\end{aligned}$$

■

# Chapitre 3

# Intégrale curviligne

## 3.1 Intégrale curviligne d'un champs de vecteurs

**Définition 3.1.1** *Un champ de vecteurs dans le plan ou l'espace consiste à se donner en chaque point* $(x, y)$ $(resp.(x, y, z))$ *un vecteur* $g(x, y)$ $(resp.g(x, y, z))$.

**Définition 3.1.2** *Soit* $t \to r(t) = (x(t)), y(t)), t \in [a, b]$ *une courbe paramétrée dont le vecteur* $r\prime(t)$ *est continue. Soit* $(x, y) \to g(x, y)$ *un champ de vecteurs continue. on appelle intégrale curviligne de* $g$ *le long de* $r$ *et on note* $\int_r g \ dx$ *le reél défini par*

$$\int_r g dx = \int_a^b g\left(r\left(t\right)\right).r'\left(t\right)dt$$

.

**Exemple 3.1.1** *soient* $g : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \to (x_1x_2, x_1 + x_2)$ *et* $r$ *le segment de droite joignant les points* $A = (0, 1)$ *et* $B = (1, 1)$, *orienté de* $A$ *vers* $B$ *un parametrage de* $r$ *est*

$$\varphi : t \in [0, 1] \to (t, 1) \in \mathbb{R}^2$$

*pour* $t \in [0, 1]$ *on a :*

$$\varphi'(t) = (1,0)\, et g(\varphi(t)) = (t, 1+t)$$

*donc :*

$$g(\varphi(t)).\varphi'(t) = t$$

*et on en déduit que :*

$$\int_r g dx = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

**Remarque 3.1.1** *l' integrale curviligne* $\int_r g \; dx$ *est dans certains contextes appelée la circulation du champ de vecteurs* $g$ *le long de la courbe* $r$*.*

**Théorème 3.1.1** *La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi sur la courbe.*

**Preuve.** On remplace le paramétre $t$ par $\tau = \varphi(t)$, et on note $r_1(\tau) = r(t)$. Le vecteur $r\prime(t)$ est changé en $v_1(\tau) = v(t)/\varphi'(t)$ . alor :

$$\begin{aligned}
\int_r g dx &= \int_J g(r_1(\tau)).v_1(\tau)\, d\tau \\
&= \int_I g(r_1(\varphi(t))).v_1(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt \\
&= \int_I g(r(t)).v(t)\, dt \\
&= \int_r g dx
\end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.1.1** *Soit* $r$ *une courbe paramétrée par son abscisse curviligne* $S$*. Soit* $g(s)$ *le vecteur unitaire tangent à* $r$*. alors la circulation d'un champ de vecteurs* $u$ *le long de* $r$ *s'écrit* $\int g.u(r(s))ds$*. On peut donc écrire*

$$circulation(g, r) = \int_r g{\cdot}uds$$

.

### 3.1.1 Cas des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

**Théorème 3.1.2** *Soit $f$ une fonction, et $t \to r(t), t \in I$, une courbe paramétrée. Pour tous $t_0$ et $t_1 \in I$,*

$$circulation(\nabla f, r[t_0, t_1]) = f(r(t_1)) - f(r(t_0))$$

.

Autrement dit, la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel ne dépend que de l'état initial et de l'état final, et non du chemin choisi. Lorsqu'un point matériel se déplace dans un potentiel, le travail fourni par la force est égale à la variation de l'énergie potentiel entre l'état final et l état initial.

## 3.2 Formes différentielles de degré 1

On considére une courbe parametrée définie par les equations :

$$\begin{cases} x = r_1(t) \\ y = r_2(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Soit $F = p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy$ forme différentielle definie dans un domaine qui contient $r$ On remplace $x$ par $r_1(t)$ et $y$ par $r_2(t)$ ona :

$$\begin{cases} dx = dr_1(t) = r_1'(t)\,dt \\ dy = dr_2(t) = r_2'(t)\,dt \end{cases}$$

Notons :

$$\begin{cases} p_1(t) = p(r_1(t), r_2(t)) \\ q_2(t) = q(r_1(t), r_2(t)) \end{cases}$$

La fourme de $g$ devient :

$$g = p_1(t)\, r_1'(t) + q_2(t)\, r_2'(t)$$

Considerons l'intégrale :

$$I = \int_a^b \left[p_1(t)\, r_1'(t) + q_1(t)\, r_2'(t)\right] dt$$

**Proposition 3.2.1** *L'intégrale $I$ ne depend pas du paramètre chois mais uniquement de la courbe $r$ et de la forme $g$*

**Définition 3.2.1** *L'integrale $I$ est applée intégrale curviligne de la forme $g = pdx + qdy$ le long de la courbe $r$ et nous la noterous* $\int_r g$ *ou* $\int_r pdx + qdy$
*ona donc :*

$$\int_r pdx + qdy = \int_a^b \left[p\left(r_1(t), r_2(t)\right) r_1'(t) + q\left(r_1(t), r_2(t)\right) r_2'(t)\right] dt$$

**Remarque 3.2.1** *Considérons le cas d'une courbe $r$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétrée par :*

$$\begin{cases} x = r_1(t) \\ y = r_2(t) & t \in [a, b] \\ z = r_3(t) \end{cases}$$

et une 1-forme différentielle $g = pdx + qdy + rdz$ L'intégrale curviligne de $I$ le long de $r$ est notée

$$I = \int_r pdx + qdy + rdz$$

elle est égale à

$$I = \int_r \left[p\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) r_1'(t) + q\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) r_2'(t) + r\left(r_1(t), r_2(t), r_3(t)\right) r_3'(t)\right] dt$$

elle ne depend pas du choix de paramètre.

**Proposition 3.2.2** *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de composantes $p(x,y)$ et $q(x,y)$ et $M(t)$ le point $(r_1(t), r_2(t))$ de la courbe et $\vec{M}'(t)$ est un vecteur tangent à la courbe $r$ et de composantes $(r_1'(t), r_2'(t))$*

$$\int_r pdx + qdy = \int_a^b \vec{V}(r_1(t), r_2(t))\, \vec{M}'(t)\, dt$$

**Preuve.** on a

$$\vec{V}(r_1(t), r_2(t))\, \vec{M} = p(r_1(t), r_2(t))\, r_1'(t) + q(r_1(t), r_2(t))\, r_2'(t)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b \vec{V}(r_1(t), r_2(t))\, \vec{M}'(t)\, dt &= \int_a^b \left[p(r_1(t), r_2(t))\, r_1'(t) + q(r_1(t), r_2(t))\, r_2'(t)\right] dt \\ &= \int_r pdx + qdy \end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.2.1** *L'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur une courbe ne dépend que de l'orientation, et non du choix de paramétrisation.*

**Corollaire 3.2.2** *L'intégrale curviligne d'une différentielle totale $g = dV$ ne dépend que des extrémités de la courbe,*

$$\int_r dV = V(r(t_1)) - V(r(t_0))$$

*En particulier, si $r$ est une courbe fermée, $\int_r dV = 0$*

### 3.2.1 Changement de coordonnées

Pour changer de coordonnées dans une forme différentielle, on substitue les nouvelles coordonnées aux anciennes.

**Exemple 3.2.1** *Passage en co-ordonnées polaires* $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. *Etant donné* $g = p(x,y)dx + q(x,y)dy$, *on différentie*

$$dx = cos\theta dr - r sin\theta d\theta, dy = sin\theta dr + r cos\theta d\theta,$$

*et on substitue*

$$g = (\cos\theta p(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta q(r\cos\theta, r\sin\theta))dr + r(-\sin\theta p(r\cos\theta, r\sin\theta) + \cos\theta q(r\cos\theta, r\sin\theta))d\theta.$$

*Cela généralise la formule de dérivation des fonctions composées*

**Théorème 3.2.1** *L'intégration des formes différentielles de degré* 1 *est invariante par changement de coordonnées.*

### 3.2.2 Formes différentielle exactes et fermées

**Définition 3.2.2** *On dit qu'une forme différentielle de degré* 1, $g$ *définie sur un domaine plan* $D$ *est exacte si c'est la différentielle totale d'une fonction définie sur* $D$

Une condition nécessaire pour que $g = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ soit exacte est que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

en chaque point de $D$. En effet, si $I = dV$ , alors $p = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial V}{\partial x}$ donc

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

**Définition 3.2.3** *Soit* $g$ *une forme différentielle de degré* 1. *On note*

$$dI = \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

*Une forme différentielle* $I$ *telle que* $dI = 0$ *est dite fermée*

**Remarque 3.2.2** *Pour calculer $dg$, il suffit d'appliquer les régles suivantes.*

- *$d$ est linéaire, i.e. passe à travers les sommes ;*
- *si $V$ est une fonction, $ddV = 0$, en particulier, $d(dx) = d(dy) = 0$ ;*
- *si $V$ est une fonction et $I$ une forme différentielle de degré 1, $d(Vg) = dVg + Vdg$ ;*
- *$dxdx = dydy = 0$, $dydx = -dxdy$.*

**Théorème 3.2.2** *Soit $D$ une partie convexe du plan. Une forme différentielle définie sur $D$ est exacte si et seulement si elle est fermée.*

**Exemple 3.2.2** *La forme $g = d\theta = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ définie sur le plan privé de l'origine est fermée mais non exacte*

**Corollaire 3.2.3** *Soit $(x, y) \to g(x, y) = \begin{pmatrix} p(x,y) \\ q(x,y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs défini sur une partie convexe $D$ du plan, alors $g$ dérive d'un potentiel définit sur $D$ si et seulement si*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

*en tout point de $D$.*

**Remarque 3.2.3** *Pour montrer qu'une forme différentielle $g$ n'est pas exacte sur son domaine de définition, on dispose de deux moyens*

- *Calculer $dg$ et voir que $dg \neq 0$.*
- *Trouver une courbe fermée $r$ telle que $\int_r I \neq 0$*

## 3.3 Propriété de l'intégrale curviligne

L'intégrale curviligne dépend linéairement de la forme $g$. Plus précisément on a les propriétés suivantes

**Proposition 3.3.1** *on a*

$$\int_r g_1 + g_2 = \int_r g_1 + \int_r g_2 \ et \int_r \lambda g = \lambda \int_r g$$

**Preuve.** ( deuxiéme partie) On écrit $g = pdx + qdy$. On a $\lambda g = \lambda pdx + \lambda qdy$. D'où

$$\begin{aligned}\int_r \lambda g &= \int_a^b \left[\lambda p\left(r_1\left(t\right), r_2\left(t\right)\right) r_1'\left(t\right) + \lambda q\left(r_1\left(t\right), r_2\left(t\right)\right) r_2'\left(t\right)\right] dt \\ &= \lambda \int_a^b \left[p\left(r_1\left(t\right), r_2\left(t\right)\right) r_1'\left(t\right) + q\left(r_1\left(t\right), r_2\left(t\right)\right) r_2'\left(t\right)\right] dt \\ &= \lambda \int_r g\end{aligned}$$

■

**Théorème 3.3.1** *Soit $g$ un champ scalaire définie et continue sur une courbe $r$. Soient $\vec{c}_1 : [a,b] \to r$ et $\vec{c}_2 : [c,d] \to r$ deux paramétrisations équivalentes de $r$, alors, on a*

$$\int_r gdx = \int_a^b g\left(\vec{c}_1\left(t\right)\right).\|\vec{c}_1'\left(t\right)\|dt = \int_a^b g\left(\vec{c}_2\left(u\right)\right).\|\vec{c}_1'\left(u\right)\|du.$$

**Preuve.** Puisque $\vec{c}_i, i = 1, 2$ sont équivalentes, il existe un changement de paramétre admissible $u : [a, b] \to [c, d]$. Si on pose $u = u(t)$ dans la seconde intégrale, on obtient

$$g\left(\vec{c}_2\left(u\right)\right).\|\vec{c}_1'\left(u\right)\|du = g\left(\vec{c}_2\left(u\left(t\right)\right)\right).\|\vec{c}_1'\left(u\left(t\right)\right)\|u'\left(t\right)dt$$

et le résultat découle de la régle de dérivation des fonctions composées. ■

**Remarque 3.3.1** *Il n'est pas diffcile de voir que le résultat reste vrai, même si $u$ renverse l'orientation de $r$. Le résultat est identique pour les intégrales de surface.*

## 3.4 Aire d'un domaine du plan

Soit $D$ un domaine dans le plan limité par une courbe $t$ fermée, sans point double. On suppose que la courbe $r$ est orientée dans le sens direct (contre le saiguilles d'une montre)

**Théorème 3.4.1** *L'aire du domaine $D$ est égale à l'intégrale curviligne*

$$S = \int_r xdy = -\int_r ydx = \frac{1}{2}\int_r (xdy - ydx).$$

**Exemple 3.4.1** *Nous recalculons l'aire de l'ellipse limitée par la courbe d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad a, b > 0$$

*Nous prendrons la représentation paramétrique*

$$x = a\cos t, \qquad\qquad y = b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0$$

*Alors l'aire de l'ellipse est égale à*

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_r (xdy - ydx) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t d(b\sin t) - b\sin t d(a\cos t)) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\cos^2 t dt + ab\sin^2 t dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

## 3.5 Formule de Green Riemann

Si $g$ est exacte sur $D$, alors pour toute courbe $r$ fermée contenue dans $D$, $\int_r g = 0$,. En effet, comme $g = du$,$\int_r g$ est la variation de $u$ entre les extrémités, donc nulle si la courbe est fermée. En général, l'intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe fermée qui borde un domaine s'écrit comme une intégrale double sur le domaine.

**Définition 3.5.1** *Si $D$ est un domaine plan, dont le bord est formée de courbes fermées $r_1, ..., r_k$, on oriente $\partial D$ suivant la convention de la matiére à gauche : lorsqu'on parcours ci, on doit avoir le domaine $D$ sur sa gauche.*

**Théorème 3.5.1** *Soit $g = p(x, y)dx + q(x, y)dy$ une forme différentielle de degré 1. Soit $r$ une courbe fermée sans point double, qui entoure un domaine $D$. On suppose que $D$ est à gauche lorsqu'on parcourt $r$, alors*

$$\int_r g = \int_D dg = \int_D \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy$$

**Preuve.** Pour simplifier, on suppose $D$ convexe. Notons I la projection du domaine $D$ sur l'axe $Ox$. Comme $D$ est convexe, il est défini par des inégalités $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ o'u $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions continues sur $I$. On calcule

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in I, f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\}} \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\, dxdy &= \int_I dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\, dy \\
&= \int_I \left(p\left(x, f_2(x)\right) - p\left(x, f_1(x)\right)\right) dx \\
&= \int_r pdx
\end{aligned}$$

De même

$$\int_D \frac{\partial q}{\partial x} dxdy = -\int_r qdy$$

. ■

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé l'étude de courbes et surfaces différentiables qui nos donnent une introduction de base de la géométrie differentielle qui joue un rôle très importants et très utilisés dans nombreux domaine de notre vie quotidienne, ou nous avons donnés leur conceptions et propriétés, ansi que quelques propriétés de l'intégrale curvilligne

# Bibliographie


[1] Matzinger, H. (2000). Aide-mémoire d'analyse (Vol. 10). PPUR presses polytechniques.any, and the Universidad Central de Venezuela.

[2] Lecomte, P. Courbes et surfaces.

[3] Tien-Cuong Dinh (2008). Analyse vectorielle, intéegrales multiples le lien r http ://www.math.jussieu.fr/ ?dinh

[4] Boris Thibert. Courbes et surfaces. Université Joseph Fourier, Grenoble I Mathématiques, Informatique et Mathématiques Appliquées Licence Sciences et Technologies 2e année

[5] J.-M. Arnaudies et J. Lelong-Ferrand, Cours de mathématiques, tome 3, Geometrie et cinematique, Dunod Universite.

[6] B. Buoni (2016). Courbes paramétrées. Ecole polytéchnique de Lausanne, Section de mathématiques

[7] Vincent GUEDJ (2015). Géometrie différentielle. Univ de Toulouse. Le lien www.math.univ-toulouse.fr/ guedj/fichierspdf/GeomDiff2015.pdf

[8] Didier Bouteloup (2010). Eléments de géometrie différentielle. Ecole Naitonal des sciences géographiques France

[9] Courbes et surfaces, Univ Paris 12, Cours de Licence

[10] Serge Botton (2009). Géométrie Différentielle et ellipsoide. Ecole National des sciences géographiques France