République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

NOURI Asma

Titre :

Systèmes Différentiels Non Autonomes

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	SILABDI Noureddine	UMKB	Président
Dr.	LAADJEL Baya	UMKB	Encadreur
Dr.	SENOUCI Assia	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venue de toi.

Mes frères et sœur qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes professeurs qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord ALLAH qui m'aide et me donne la santé, la patience et le courage durant ces langues années d'étude et la force pour finir ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur Dr.LAADJEL Baya, pour ses précieux consiels, ses orientations et sa patience.

Je remercie également Dr.SILABDI Noureddine Président du Jury et Dr.SENOUCI Assia Examinateur pour avoir accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Un grand merci à mes parents pour leur grand sacrifice et leur dévouement pour mon bonheur. ils m'ont toujours soutenu, dans les meilleurs moments comme dans les pries.

Table des matières

Introduction

Un système différentiel non autonome est un ensemble très général de composants en interaction (un système), répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés ; il est le plus souvent régi par un ensemble d'équations différentielles décrivant le mouvement des composants (leur dynamique) où intervient une classe de paramètres accessibles.

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques écologiques,...etc. Peuvent être modélisés par des équations différentiables linéaires ou non linéaires, et l'étude de ces équations passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés de leurs solutions. Bien sur, l'équation différentielle caractérisant le système différentiel peut être plus complexe, voire inconnue. Il y a deux cas particuliers importants d'équation différentielle :

Équations différentielle autonome est une équation de forme $X' = F(X)$ pour la quelle F ne dépend pas du temps.

Équations différentielle non autonome arriver que le temps t intervient directement dans l'équation qui s'écrit alors $X' = F(t, X)$.

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes différentiels est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini ; ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis la fin du XIXème siècle. Son importance réside dans le fait que la notion de la stabilité est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'un point de vue technique, la stabilité est nécessaire au fonctionnement des engins.

Pour l'étude de la stabilité non linéaire, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé, Lyapunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques "un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimum isolé est dans un état d'équilibre stable". Cette méthode, appelée aussi méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles. Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse du point X ($X \in \mathbb{R}^n$) est toujours dirigée vers l'intérieur, ce point finira par arriver à l'origine ; dans le cas contraire, le point X s'en écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction V peut être choisie comme étant l'énergie du système.

Malheureusement, la méthode directe de Lyapunov donne des conditions suffisantes mais pas nécessaires de stabilité (une exception est faite pour les systèmes linéaires et stationnaires) ; un système peut avoir une infinité de fonctions de Lyapunov ; par conséquent, le fait qu'une fonction ne prouve pas la stabilité n'implique pas l'instabilité et, de plus, il existe certaines classes de systèmes asymptotiquement stables qui ne possèdent pas une fonction de Lyapunov. L'utilité de la méthode réside surtout dans la détermination du domaine d'attraction ; elle permet aussi de répondre aux questions de stabilité quand la linéarisation ne donne aucune information. La difficulté de la recherche de la fonction V constitue un vrai handicap puisqu'on ne connaît pas de procédés pour la construction de fonctions adéquates dans le cas général ; cependant, il existe des techniques de construction applicables à des cas particuliers. Il donne alors une condition suffisante pour la stabilité des systèmes non linéaires. Chetaev, quant à lui, montrera un théorème d'instabilité en 1934.

Notre travail est structuré en deux chapitres :

D'abord, dans le premier chapitre, nous passons rapidement en revue des concepts d'algèbre et nous donnons quelques notions de base concernant les systèmes différentiels connue. Les points critiques, la stabilité au sens de Lyapunov et le théorème de Cauchy

Lipschitz qui affirme l'existence et l'unicité des solutions.

Nous terminons ce chapitre par donner un rappel sur les systèmes autonomes (linéaires et non linéaires) et leur stabilité.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous étudions les systèmes non autonomes linéaires (homogènes et homogènes) et non linéaires où nous donnons les différents résultats concernant la stabilité des équilibres (méthode directe et inverse de Lyapunov), théorème d'instabilité (Chetaev).

Chapitre 1

Généralité sur les systèmes différentiels

Intuitivement, une équation différentielle est une égalité qui contient des variables (indépendantes) et des fonctions inconnues qui dépendent de ces variables ainsi que leurs dérivées (partielles) successives.

Lorsque le nombre des variables est supérieur à un, on parle d'équation aux dérivée partielles. Sinon, l'équation est dite ordinaire. Un système d'équations différentielles est une famille d'équations différentielles. Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons qu'aux systèmes d'équations différentielles ordinaires.

L'objectif de ce chapitre est de d'introduise quelques notions générales et un vocabulaire de départ que l'on retrouve dans beaucoup de manuels qui traitent du domaine. Nous terminons ce chapitre par donner un rappel sur la stabilité des systèmes autonomes.

1.1 Systèmes différentiels

Définition 1.1.1 *: Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On appelle équation différentielle ordinaire non autonome du premier ordre toute équation* *de la forme*

$$\frac{d}{dt}X = F(t, X), \qquad (t, X) \in U,\ t \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2 *: Une solution de* (1.1) *sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $X : I \to \mathbb{R}^n$ telle que :*

• $\forall t \in I, \quad (t, X(t)) \in U.$

• $\forall t \in I, \quad X'(t) = F(t, X(t))\,.$

Définition 1.1.3 (PROLONGEMENT) *: Soient $X : I \to \mathbb{R}^n$ et $\tilde{X} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de* (1.1)*, on dit que $\tilde{X}$ est un prolongement de X si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{X}|_I = X$ ($\forall y \in \tilde{I}, \quad X(y) = \tilde{X}(y)$).*

Définition 1.1.4 (SOLUTION MAXIMALE) *: On dit que la solution $X : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution maximale de* (1.1)*, s'il n'existe pas de solution de* (1.1) *qui la prolonge strictement.*

Définition 1.1.5 (SOLUTION GLOBALE) *: Une solution $X : I \to \mathbb{R}^n$ est dite globale dans I de* (1.1) *si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.*

Remarque 1.1.1 *: Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse (globale$\Rightarrow$maximale).*

1.1.1 Ecriture en coordonnées

Ecrivons les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^n$ en termes de leurs fonctions composantes, c'est à dire $X = (x_1, \ldots, x_n)\,,\ F = (f_1, \ldots, f_n)\,.$

L'équation (1.1) apparaît comme un système différentiel du premier ordre à n fonctions inconnues $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \qquad\vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

Définition 1.1.6 *: Un système différentiel non autonome est un système d'équations différentielles du premier ordre donner par :*

$$X'(t) = F(t, X(t)) \iff \begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \tag{1.2}$$

Où : $X \in M \subset \mathbb{R}^n, t \in I \subset \mathbb{R}$ avec les variables d'état $x_1, ..., x_n$ et la variable t représentant en générale le temps.

Toutes les dérivées sont par rapport à la variable t et les fonctions $f_i\,(1 \leq i \leq n)$ sont des fonctions connues de t et des variables d'état.

Proposition 1.1.1 *: Toute équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{R}^n$ sous la forme suivante*

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{K}$$

Peut être ramenée à un système de n équations du premier ordre de type (1.2).

Preuve. Nous introduisons de nouvelles variables, dites d'état $x_1, \ldots, x_n$ en posant

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y",\ldots, x_n = y^{(n-1)}, \tag{K'}$$

alors :

$$x_n' = y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

On dérive chaque terme de chaque équation de (K') et on utilise ces équation encore une fois ainsi que l'équation (K) pour déterminer le système d'EDO du premier ordre

$$\begin{cases} x_1' & = & y' = x_2 \\ x_2' & = & y'' = x_3 \\ x_3' & = & y''' = x_4 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & y^{(n-1)} = x_n \\ x_n' & = & y^{(n)} = f\left(t, x_1, \ldots, x_n\right) \end{cases}$$

■

Application : si on pose

$$f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = -a_0 y - a_1 y' - a_2 y'' - \ldots - a_{n-1} y^{(n-1)} + g\left(t\right),$$

alors :

$$\begin{cases} x_1' & = & 0.x_1 + 1.x_2 + \ldots + 0.x_n = f_1\left(t, x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) \\ x_2' & = & 0.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 + \ldots + 0.x_n + 0 = f_2\left(t, x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - \ldots - a_{n-1} x_n + g\left(t\right) = f_n\left(t, x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g\left(t\right) \end{pmatrix}$$

c-à-d :

$$X'\left(t\right) = A\left(t\right) X\left(t\right) + C\left(t\right).$$

Où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice et $C(t) \in \mathbb{R}^n$.

Alors, Y est solution de (K) si et seulement si X est solution de $X'(t) = A(t)X(t) + C(t)$.

Exemple 1.1.1 *: Soit* $y''' - y'' = \cos(t)$, *posons :*

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \end{cases}$$

Alors :

$$y''' - y'' = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = x_3 \\ x_3' = y''' = y'' + \cos(t) = x_3 + \cos(t) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad X' = A(t)X + C(t).$$

Définition 1.1.7 *:*

1. *Un système différentiel est dit autonome si la fonction F est indépendante de la variable t, i.e.*

$$X'(t) = F(X(t)).$$

2. *L'espace M des variables d'état $x_1, \ldots, x_n$ est appelé espace d'état ou espace des phases.*

3. *Dans l'espace des phases, la courbe $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est la trajectoire de la solution.*

Définition 1.1.8 (Point d'équilibre) *: Nous appelons point d'équilibre (ou point critique ou point singulier) de (1.2) le point $p \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $F(p,t) = 0, \forall t \in I \subset \mathbb{R}$.*

On considérera toujours l'équilibre $p = 0$. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

Exemple 1.1.2 *: Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -y - \sin x \end{cases}.$$

Les points $(0, 0)$ *et* $(\pi, 0)$ *sont des points d'équilibres.*

1.1.2 Problème de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $F : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. On note $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.9 (Problème de Cauchy) *: Un problème de Cauchy* (PC) *est la donnée d'un système différentiel et d'une condition initiale. C'est donc un problème de type :*

$$\begin{cases} X'(t) = & F(t, X(t)) \\ X(t_0) = & X_0 \end{cases}, \tag{1.3}$$

c-à-d

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \; x_1(t_0) = \alpha_1 \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \; x_2(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \; x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases},$$

avec $t, t_0 \in \mathbb{R}$, *et* $X, X_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.10 *: On appelle solution du problème* (PC) *un ensemble des fonctions* $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ *définies sur un intervalle* I *contenant* t_0 *et qui satisfont les équations du problème de Cauchy* (1.3).

Définition 1.1.11 (Condition de Lipschitz) *: Une application $F(t,X)$ continue de $\Delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne en X dans un compact $V \subset \Delta$ si $F(t,X)$ est continue dans V et s'il existe une constante L telle que*

$$\|F(t,X_1) - F(t,X_2)\| \leq L\|X_1 - X_2\|, \quad \forall (t,X_1) \text{ et } (t,X_2) \in V.$$

Théorème 1.1.1 (Cauchy-Lipschitz) *Soit $F(t,X)$ définie dans un ouvert $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose qu'il existe un compact $V \subset \Delta$ et contennant le point (t_0, X_0), défini par :*

$$V = \{(t,X) \in \Delta / \quad t \in I = [t_0 - a, t_0 + a], \quad \|X - X_0\| \leq b, \quad a, b > 0\}.$$

tel que $F(t,X)$ est lipschtizienne en X dans V.
Le système différentiel (1.1) admet une et une seule solution $X(t) \in V$ passant par le point (t_0, X_0); cette solution est définie et dérivable sur un intervalle fermé $I_0 \subset I$, qui est l'unique solution de l'équation intégrale

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,ds, \quad \forall t \in I_0 \Longrightarrow X_0 = X(t_0).$$

Nous noterons cette solution $X(t,t_0,X_0)$; $X_0 = X(t_0,t_0,X)$.

1.2 Stabilité d'une solution au sens de Lyapunov

Supposons que la solution $X(t,t_0,X_0)$ soit définie pour $t \geq t_0$.

Définition 1.2.1 *: On dit que cette solution est stable dans l'intervalle $[t_0, +\infty[$ (au sens de Lyapunov) si elle satisfait la condition suivante :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la condition $\|Y_0 - X(t_0)\| \leq \delta$, l'unique solution $Y(t)$ de l'équation (1.1) telle que $Y(t_0) = Y_0$ est définie dans tout l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et

vérifie dans cet intervalle l'inégalité

$$\|Y(t) - X(t)\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.2 *: On dit que cette solution est asymptotiquement stable dans l'intervalle* $[t_0, +\infty[$ *si elle vérifie la condition de stabilité et si, de plus :*
$\exists \delta_0 > 0$ *tel que* $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant la condition* $\|Y_0 - X(t_0)\| \leq \delta_0$, *l'unique solution* $Y(t)$ *de l'équation* (1.1) *telle que* $Y(t_0) = Y_0$ *est définie dans tout l'intervalle* $[t_0, +\infty[$ *et vérifie la condition*

$$\lim_{t \to +\infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0.$$

Définition 1.2.3 *: Une solution est dite instable si elle n'est pas stable dans l'intervalle* $[t_0, +\infty[$.

1.3 Système autonome linéaire

Un système différentiel autonome linéaire est donné sous la forme

$$X'(t) = AX, \tag{1.4}$$

où A est une matrice réelle $n \times n$.

Remarque 1.3.1 *: L'ensemble des solutions du système* (1.4) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

1.3.1 Rappel d'algèbre linéaire

Définition 1.3.1 *: Une matrice carrée* A *est diagonale si seules les composantes sur la diagonale sont différentes de zéro* ($a_{ij} = 0$, *lorsque* $i \neq j$).

Définition 1.3.2 *: Soit M et P sont deux matrices carrées satisfaisant $MP = I$ (I : la matrice identité), on dit que les matrices sont inverses l'une de l'autre et on note $M = P^{-1}$.*

Définition 1.3.3 *: Une matrice carrée est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.*

Définition 1.3.4 *: On dit qu'une matrice carrée A est nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$ soit la matrice nulle.*
L'indice de nilpotente est alors le plus petit p tel que : $A^p = 0$.

Définition 1.3.5 *: On dit que λ est valeur propre de A s'il existe un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que : $AX = \lambda X$.*
Le vecteur X est le vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Remarque 1.3.2 *: Les valeurs propres de A sont les solutions en λ de l'équation : $\det(A - \lambda I_n) = 0$ et les vecteurs propres correspondants sont les éléments du noyau de $(A - \lambda I_n)$ i.e : $\ker(A - \lambda I_n)$.*

1.3.2 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.3.6 *: Si A est une matrice carrée $n \times n$, l'exponentielle de la matrice A est donnée par*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^k}{k!} + \ldots$$

Proposition 1.3.1 *: Si A est nilpotente d'indice de nilpotente k, $\left(\exists k / A^k = 0\right)$, alors :*

$$e^A = I + A + \ldots + \frac{1}{(k-1)} A^{k-1} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{A^n}{n!}.$$

Proposition 1.3.2 *: Soient A et B deux matrices de $M(n,n,\mathbb{R})$ et 0 la matrice nulle de $M(n,n,\mathbb{R})$, on a :*

1- *Si A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A . e^B$.*

2- $e^0 = I_n$ *et* e^A *est inversible d'inverse* e^{-A}.

3- *Si* B *est inversible, alors* $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.

Remarque 1.3.3 *:*

1. *Si la matrice* A *est diagonale c-à-d :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors :

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2. *Si la matrice* A *est diagonalisable alors elle admet* n *vecteurs propres* V_i *linéairement indépendants, associés à* n *valeurs propres* λ_i*, cela veut dire que* $A = PDP^{-1}$ *où* P *est une matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres de* A *et* D *est une matrice diagonale ayant sur la diagonale les vecteurs propres de* A.

   On déduit facilement que : $e^A = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1}$.

Théorème 1.3.1 *: Soit* $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ *et* $t_0 \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)_{t=t_0} = e^{t_0 A}.A = A.e^{t_0 A}.$$

1.3.3 Résolution d'un système autonome linéaire

Cas où A diagonalisable

Soit A diagonalisable c-à-d $A = PDP^{-1}$, alors :

$$\text{Le système (1.4)} \iff X'(t) = PDP^{-1}X(t)$$

Ce qui implique :

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$$

Et en posant $Z(t) = P^{-1}X(t)$, alors $Z'(t) = P^{-1}X'(t)$ donc

$$Z'(t) = DZ(t) \iff \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ \vdots \\ z_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ z_2'(t) = \lambda_2 z_2(t) \\ \quad\vdots \\ z_n'(t) = \lambda_n z_n(t) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) \\ z_2(t) = \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) \\ \quad\vdots \\ z_n(t) = \alpha_n \exp(\lambda_n t) \end{cases}.$$

Enfin, $X(t) = PZ(t)$ alors la solution générale du système (1.4) est :

$$X(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t)\, v_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)\, v_2 + \ldots + \alpha_n \exp(\lambda_n t)\, v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i t)\, v_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.3.1 *: Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres sont $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 2,$ *et les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont respectivement :* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

On a $A = PDP^{-1}$ *où :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors : $X'(t) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 t) v_1 + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t) v_2.$

Donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 \exp(4t) + \alpha_2 \exp(2t) \\ x_2(t) = \alpha_1 \exp(4t) + 3\alpha_2 \exp(2t) \end{cases}.$$

Cas où A est triangularisable

Dans le cas où A est triangularisable, non diagonalisable, on considère P matrice de passage telle que $T = P^{-1}AP$ avec T triangulaire supérieure, alors :

$$X'(t) = AX(t) \iff X'(t) = PTP^{-1}X(t) \iff Y'(t) = TY(t),\ \text{où}\, Y(t) = P^{-1}X(t)$$

Donc

$$Y'(t) = TY(t) \iff \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y_1'(t) = & \lambda_1 y_1(t) + t_{12} y_2(t) + \ldots + t_{1n} y_n \\ y_2'(t) = & \lambda_2 y_1(t) + t_{23} y_3(t) + \ldots + t_{2n} y_n \\ \vdots & \\ y_n'(t) = & \lambda_n y_n(t) \end{cases} .$$

On résout en partant de la dernière équation, et en remontant équation par équation, puis $X(t) = PY(t)$ permet de conclure.

Théorème 1.3.2 *: Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} X'(t) = & AX(t) \\ X(t_0) = & X_0 \end{cases} ,$$

admet pour une unique solution est donnée comme suit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$.

1.4 Stabilité des systèmes autonomes

1.4.1 Stabilité des points d'équilibres

Soit le système différentiel autonome :

$$\begin{cases} X'(t) = & F(X(t)) \\ X(t_0) = & X_0 \end{cases} . \tag{1.5}$$

Où, $X \in U \subset \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$.

Soient $A \subset U$, $\varepsilon > 0$, on définit la boule :

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in U;\ \|y - x\| < \varepsilon\} \text{ et } B_{\varepsilon}(A) = \underset{x \in A}{\cup} B(x,\varepsilon).$$

Dans les définitions suivantes, on suppose que $p = 0$ est le point d'équilibre du système (1.5).

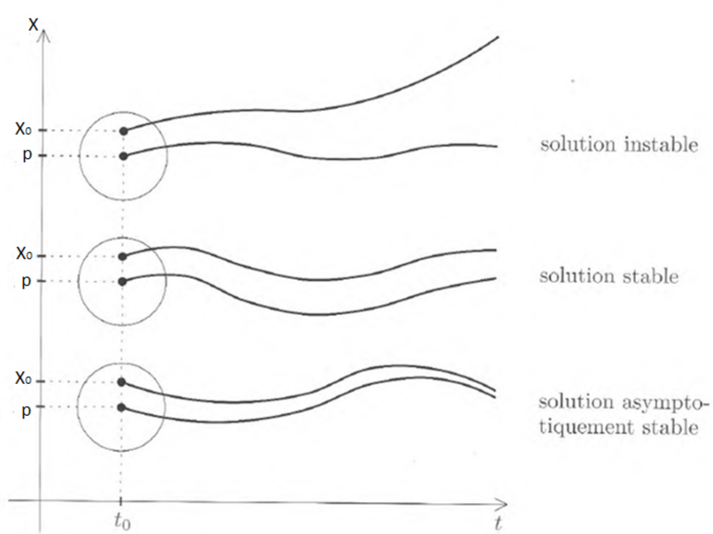
Définition 1.4.1 *: La position d'équilibre $p = 0$ est stable en sens de Lyapunov si :* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t_0 \in I$, $\exists \delta(t_0, \varepsilon)$ *tel que* $\forall X_0$ *vérifiant* $\|X_0\| < \delta$ *(i.e* $X_0 \in B(p,\delta)$*), la solution du système* (1.5) *vérifie :*

- $X(t)$ *est définie pour tout* $t \geq t_0$.
- *Pour tout* $t \geq t_0$, $\|X(t)\| < \varepsilon$. *(i.e :* $X(t) \in B(p,\varepsilon)$*).*

Définition 1.4.2 *: La position d'équilibre $p = 0$ est asymptotiquement stable si :*

- *Elle est stable en sens de Lyapunov.*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \|X(t)\| = 0$.

Remarque 1.4.1 *: La stabilité asymptotique implique la stabilité, mais la réciproque n'est pas toujours vrais.*



Définition 1.4.3 *: De façon générale, on dit que :*

1- *Un point d'équilibre p est stable si et seulement si pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que si une trajectoire est dans la boule $B(p, r)$ à instant t_0, elle reste dans la boule $B(p, R)$ à tout instant $t > t_0$.*

2- *Un point d'équilibre p est instable si et seulement s'il n'est pas stable.*

3- *Un point d'équilibre p est asymptotiquement stable si et seulement s'il est stable et de plus il existe $l > 0$ tel que toute trajectoire qui est dans $B(p, l)$ à t_0 s'approche de p quand $t \to +\infty$.*

1.4.2 Stabilité des systèmes linéaires

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'étude de la stabilité du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = & AX(t), \; X \in \mathbb{R}^n \\ X(0) = & X_0 \end{cases} . \tag{1.6}$$

Où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Définition 1.4.4 *: Le système* (1.6) *est dit stable si l'origine est stable et il est dit asymptotiquement stable si l'origine est asymptotiquement stable.*

Théorème 1.4.1 *: Le point $p = 0$ est en effet le seul point d'équilibre de système* (1.6). *Alors :*

1. *Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre* 0 *est asymptotiquement stable.*
2. *Le point d'équilibre* 0 *est stable si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle où* $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ *il faut que la multiplicité algébrique égale à la multiplicité géométrique.*

3. *Si il existe au moins une valeur propre de* A *telle que* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, *alors le point d'équilibre* 0 *est instable.*

Exemple 1.4.1 *: Considérons le système*

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = & 2x_1(t) - 2x_2(t) \end{cases}.$$

Les valeurs propre de A *sont* $\lambda_1 = 0$ *et* $\lambda_2 = -1$. *Comme elles sont simples, le système est stable.*

Remarque 1.4.2 *: Dans le cas de la dimension* 2, *comme* $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$ *et* $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$, *on peut également dire que l'origine (ou le point d'équilibre* $p = 0$*) est asymptotiquement stable si* $\det A > 0$ *et* $trA < 0$.

1.4.3 Stabilité des systèmes non linéaires

Soit le système différentiel non linéaire suivant

$$\begin{cases} X'(t) = & F(X(t)) \\ X(t_0) = & X_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

Pour étudier la stabilité de ce système on a deux méthodes :

1-Méthode directe de Lyapunov

Cette méthode consiste à étudier la stabilité d'un système (1.7) à l'aide d'une fonction convenablement choisie(V), appelée fonction de Lyapunov. Cette méthode, dite directe.
On suppose l'équilibre $p = 0$. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.
Alors on a la définition suivante :

Définition 1.4.5 *: On appelle fonction de Lyapunov pour le point d'équilibre p une fonction $V : \vartheta \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue sur un voisinage ϑ de p, et différentiable sur $\vartheta - \{p\}$ telle que :*

a- $V(p) = 0$ *et* $V(X) > 0$ *si* $X \neq p$

b- $V'(X) \leq 0$ *dans* $\vartheta - \{p\}$

c- *Si de plus* $V'(X) < 0$ *dans* $\vartheta - \{p\}$, *alors* V *est une fonction de Lyapunov stricte.*

C'est le théorème suivant qui sert à utiliser les fonctions de Lyapunov.

Théorème 1.4.2 *: Si le point d'équilibre p admet une fonction de Lyapunov, alors c'est un point d'équilibre stable. Si le point d'équilibre p admet une fonction de Lyapunov stricte, alors c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable.*

Exemple 1.4.2 *: On considère l'équation*

$$x'' + \varepsilon\left(x^2 - 1\right)x' + x = 0, \quad \varepsilon < 0,$$

qui s'écrit encore sous la forme

$$\begin{cases} x' = & y - \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \\ y' = & -x \end{cases}.$$

Le seul point d'équilibre est $(0,0)$, *posons*

$$V(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

De plus, la dérivée de V *pour le système vaut*

$$V' = y\frac{dy}{dt} + x\frac{dx}{dt} = -\varepsilon x^{2\prime}\left(\frac{x^2}{3} - 1\right).$$

Dans $\Omega = \{(x, y) / x^2 + y^2 < 3\}$, V est une fonction de Lyapunov associée au système avec $V' < 0$ pour $x^2 + y^2 \neq 0$. On en conclut donc que le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Remarque 1.4.3 *La méthode directe de Lyapunov donne des conditions suffisantes mais pas nécessaires de stabilité (une exception est faite pour les systèmes linéaires et stationnaires) ; un système peut avoir une infinité de fonctions de Lyapunov ; par conséquent, le fait qu'une fonction ne prouve pas la stabilité n'implique pas l'instabilité et, de plus, il existe certaines classes de systèmes asymptotiquement stables qui ne possèdent pas une fonction de Lyapunov.*

L'utilité de la méthode réside surtout dans la détermination du domaine d'attraction ; elle permet aussi de répondre aux questions de stabilité quand la linéarisation ne donne aucune information. La difficulté de la recherche de la fonction V constitue un vrai handicap puisqu'on ne connaît pas de procédés pour la construction de fonctions adéquates dans le cas général

2-Méthode indirecte de Lyapunov (linéarisation)

Définition 1.4.6 *On appelle linéarisé du système différentielle $X' = F(X(t))$ au point d'équilibre p le système linéaire $Y' = (JacF)_p Y$, où $(JacF)_p$ est la matrice Jacobienne de F au point d'équilibre p*

$$(JacF)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X)|_{X=p} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X)|_{X=p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X)|_{X=p} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X)|_{X=p} \end{pmatrix}.$$

Si l'on fait un développement limité de F au voisinage de p, le terme linéaire est donné par $(JacF)_p (X - p)$.

Exemple 1.4.3 *: Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -y - \sin x \end{cases}$$

Le linéarisé en $(0,0)$ *est :*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le linéarisé en $(0,\pi)$ *est :*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Cette méthode consiste à étudier la stabilité du système non linéaire en utilisant son linéarisé puisque en général, les solutions d'un système différentiel non linéaire $X' = F(X)$ ressemblent à celles de son linéarisé : $Y' = (JacF)_p Y$ au voisinage du point d'équilibre p.

Définition 1.4.7 *: Le point d'équilibre est dit point hyperbolique si toutes les valeurs propres de* $(JacF)_p$ *sont de parties réelles non nulles.*

Théorème 1.4.3 *: Supposons que* p *est un point d'équilibre hyperbolique du système* $X' = F(X)$.

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice* $(JacF)_p$ *sont de parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre* p *est asymptotiquement stable.*
2. *Si la matrice* $(JacF)_p$ *possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre* p *est instable.*

Notons que la linéarisation classique ne permet d'étudier que la stabilité locale "stabilité du point d'équilibre", et ne donne aucun renseignement sur le domaine d'attraction.

Remarque 1.4.4 *Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive, puisque les termes non linéaires influent sur les propriétés de la stabilité et dans ce cas, on fait appel à d'autres procédés pour l'étude de la stabilité non linéaire.*

Exemple 1.4.4 *: On considère le système différentiel :*

$$\begin{cases} x'(t) = & y \\ y'(t) = & -2y - \sin x \end{cases}$$

On veut étudier la stabilité du système au voisinage du point critique $(0,0)$. *la matrice* $(JacF)_{(0,0)}$ *s'écrit :*

$$(JacF)_{(0,0)} = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -2 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comme $trA = -2$ *et* $\det A > 0$, *on en déduit que le point critique* $(0,0)$ *est asymptotiquement stable.*

Remarque 1.4.5 *: Si une des valeurs propres est de partie réelle nulle (le point d'équilibre est non hyperbolique), la méthode par linéarisation ne permet pas de conclure sur la stabilité du système au voisinage du point d'équilibre.*

Chapitre 2

Systèmes différentiels non autonomes

Soit le système d'équations différentielles non autonomes d'ordre n.

$$X'(t) = F(t, X(t)), \tag{2.1}$$

où : $X \in U \subset \mathbb{R}^n, t \in I =]a, +\infty[$.

L'équation (2.1) est la représentation vectorielle d'un système de n équations différentielles

$$x_i'(t) = f_i(t, X(t)), \quad 1 \leq i \leq n, \quad X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\}.$$

2.1 Résolution des systèmes non autonomes

2.1.1 Systèmes différentiels linéaires homogènes

L'objectif de ce paragraphe est de généraliser les résultats du système autonome linéaire au cas des systèmes non autonome linéaires homogènes de la forme :

$$X'(t) = \frac{dX}{dt}(t) = A(t) X(t), \quad X(t) \in U \subset R^n, \quad t \in I =]a, +\infty[, \tag{2.2}$$

où $A(t)$ est une matrice réelle $n \times n$ dont les n^2 coefficients $a_{ij}(t)$ sont des fonctions continues de $t \in I, \forall i, j = \overline{1, n}$.

Théorème 2.1.1 (Existences des solutions) *: Le système différentiel* (2.2) *admet, pour tout* $t_0 \in I$ *et* $X_0 \in R^n$ *une et une seule solution* $X(t, t_0, X_0)$ *telle que* $X(t_0, t_0, X_0) = X_0$ *et définie pour tout* $t \in I$*.*

Résolvante d'un système linéaire

Considérons l'équation linéaire sans second membre (2.2).

Soit S l'ensemble des solutions de (2.2) :

$$S = \left\{ X \in C^1(I, \mathbb{R}^n), \quad X'(t) = A(t) X(t) \right\}.$$

Et pour tout $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ on sait que :

$$\begin{array}{rccl} \phi_{t_0}: & S & \to & \mathbb{R}^n \\ & X & \to & \phi_{t_0}(X) = X(t_0) \end{array},$$

est un isomorphisme $\mathbb{R}-$linéaire.

Définition 2.1.1 *: Pour tout couple* $(t, t_0) \in I^2$, *on définit :*

$$R(t, t_0) = \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}.$$

Où

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \overset{\phi_{t_0}^{-1}}{\to} & S & \overset{\phi_t}{\to} & \mathbb{R}^n \\ V & \to & X & \to & X(t) \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{rccl} R(t, t_0): & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & V & \to & R(t, t_0) V = X(t) \end{array}.$$

Donc $R(t, t_0) V = X(t)$ *où* X *est la solution de* (2.2), *telle que* $X(t_0) = V$.

Définition 2.1.2 *: La matrice $R(t,t_0)$ s'appelle la résolvante du système linéaire* (2.2) *.*

Propriété 2.1.1 (de la résolvante) *: La résolvante $R(t,t_0)$ a les propriétés suivantes :.*

I- $\forall t \in I,\ R(t,t) = I_n$ *(matrice unité $n \times n$)*.

II- $\forall (t_0,t_1,t_2) \in I^3, \quad R(t_2,t_1)\,R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$.

III- $\dfrac{d}{dt}R(t,t_0) = A(t)\,R(t,t_0)$.

IV- $\forall (t_0,t_1) \in I^2, \quad R(t_0,t_1)$ *est inversible d'inverse* $R(t_1,t_0)$.

Propriété 2.1.2 *: Soit $M(t) \in M_n(\mathbb{R})$. La résolvante $R(t,t_0)$ est l'unique solution dans $M_n(\mathbb{R})$ du problème :*

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} & = A(t)\,M(t) \\ M(t_0) & = I_n. \end{cases}$$

Remarque 2.1.1 *:*

1. *La solution du problème de Cauchy $X'(t) = A(t)\,X(t)$ avec la condition initiale $X(t_0) = V$ est donnée par :*

$$X(t) = R(t,t_0).V$$

2. *Dans le cas particulier où la matrice A est une constante (système autonome), l'opérateur résolvant est défini par :*

$$R(t,t_0) = \exp\left((t-t_0)\,A\right).$$

3. *Dans le cas non autonomes, il n'existe pas en général de forme explicite connue de $R(t,t_0)$.*

Propriété 2.1.3 *: Si $A(t)\,A(s) = A(s)\,A(t)$ pour tous $t,s \in I$. Alors, $R(t,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)$.*

Preuve. : Soit $M(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\,ds\right)$.

Montrons que M est la solution du problème

$$M'(t) = A(t)\, M(t), \quad M(t_0) = I_n.$$

Par hypothèse, $A(t)$ et $A(s)$ commutent, c-à-d, $A(t)\, A(s) = A(s)\, A(t)$, d'où $\int_a^b A(s)\, ds$ et $\int_c^d A(s)\, ds$ commutent pour tous $a, b, c, d \in I$ et :

$$\int_a^b A(s)\, ds \int_c^d A(r)\, dr = \int_c^d A(r)\, dr \int_a^b A(s)\, ds = \int_{[a,b]\times[c,d]} A(s)\, A(r)\, dsdr.$$

Dés lors,

$$M(t+h) = \exp\left(\int_t^{t+h} A(s)\, ds\right) M(t),$$

grâce à la formule précédente. Or, $\int_t^{t+h} A(s)\, ds = hA(t) + 0(h)$ et donc

$$\begin{array}{rcl} M(t+h) & = & [I_n + hA(t) + 0(h)]\, M(t) \\ & = & M(t) + hA(t)\, M(t) + 0(h) \end{array}.$$

Par conséquent,

$$M'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = A(t)\, M(t), \quad M(t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0} A(s)\, ds\right) = I_n.$$

Alors, on obtient que :

$$R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\right).$$

■

Remarque 2.1.2 *: Si U et V sont des matrices constantes qui commutent ($UV = VU$) et si $A(t) = f(t)\, U + g(t)\, V$, où f et g sont deux fonctions réelles alors $A(t)\, A(s) = A(s)\, A(t)$.*

On a donc

$$R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds.U\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds.V\right).$$

Exemple 2.1.1 *: Soit le système :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = & 2tx_1(t) \\ x_2'(t) = & \sin(t)\, x_2(t) \end{cases}. \tag{2.3}$$

Remarquons que ce système est facile à résoudre car la matrice associée est diagonale. Donc, la solution générale de (2.3) *est :*

$$X(t) = \begin{pmatrix} \exp(t^2) & 0 \\ 0 & \exp(-\cos(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(t^2) & + & c_2.0 \\ c_1.0 & + & c_2 \exp(-\cos(t)) \end{pmatrix}.$$

D'où, la matrice résolvante est :

$$R(t,0) = \begin{pmatrix} \exp(t^2) & 0 \\ 0 & \exp(-\cos(t)) \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1.3 *: Les colonnes de $R(t,t_0)$ sont formées par les solutions X_i du système homogène qui vérifient la condition initiale $X_i(t_0) = e_i$. (e_i le $i-$ème vecteur de base canonique).*

Exemple 2.1.2 *: Donnons la résolvante $R(t,0)$ du système* (2.3) . *On a $R(t,0) = (X_1(t), X_2(t))$, où :*

$$X_i(t) = R(t,0)\, c_i \ \ et\ X_i(0) = R(0,0)\, c_i = e_i.$$

D'onc, on obtient :

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \exp(t^2) \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(-\cos(t)) \end{pmatrix}.$$

C'est exemple montre que c'est le plus souvent la résolution du système qui permet de déterminer la résolvante, et non pas l'inverse comme pourrait croire la terminologie.

Wronskien

On va voir ici qu'on sait toujours calculer le déterminant d'un système de solutions ou ce qui revient au même, le déterminant de la résolvante, même lorsque la résolvante n'est pas connue.

Définition 2.1.3 *: Le Wronskien d'un système de n solutions $X_1, ..., X_n$ de* (2.2) *est :*

$$W(t) = \det(X_1(t), ..., X_n(t)), \quad \forall t \in I.$$

Posons $V_i = X_i(t_0)$. Alors $X_i(t) = R(t, t_0) V_i$, d'où

$$W(t) = \det R(t, t_0) . \det(V_1, ..., V_n)$$

Théorème 2.1.2 *:*

a- $\det R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds\right)$.

b- $W(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\, ds\right) . \det(V_1, ..., V_n)$.

Exemple 2.1.3 *: D'après l'exemple* (2.1.1), *on a :*

$$W(t) = \det(R(t,0)) = \begin{vmatrix} \exp(t^2) & 0 \\ 0 & \exp(-\cos(t)) \end{vmatrix} = \exp\left(t^2 - \cos(t)\right).$$

2.1.2 Systèmes différentiels linéaires non homogènes

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} X'(t) = & A(t) X(t) + C(t), \quad X \in \mathbb{R}^n \\ X(t_0) = & V \end{cases} \tag{2.4}$$

Soient :

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix};\quad X'(t)=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix};\quad C(t)=\begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

et :

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Définition 2.1.4 *: On appelle l'égalité* (2.4) *un système différentiel non autonome linéaire du premier ordre avec le second membre* $C(t)$.

Où $A(t)$ est une matrice réelle $n\times n$, et $C(t)\in\mathbb{R}^n$, on suppose que les n^2 composantes de $A(t)$ et les n composantes de $C(t)$ sont des fonctions continues de $t\in I=\left]-a,+\infty\right[$, $a>0$.

Nous intéressons dans ce paragraphe au solutions du système (2.4) définies par la condition initiale $X(t_0)\in\mathbb{R}^n$, $t\in I$ et de leur comportement lorsque $t\to+\infty$.

Méthode de variation des constantes (Lagrange)

Soit à résoudre le système différentiel linéaire (2.4), telle que la solution générale de (2.4) est donnée par

$$X(t)=X_H(t)+X_P(t),$$

où $X_H=R(t,t_0)V$ est la solution du système homogène associée à (2.4). On cherche alors une solution particulière de (2.4) sous la forme

$$X(t)=R(t,t_0)V(t),$$

où V est supposée différentiable. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}(t) &= \left(\frac{d}{dt}R(t,t_0)\,V(t)\right)\\ &= (\frac{d}{dt}R(t,t_0))V(t) + R(t,t_0)\,V'(t)\\ &= A(t)\,R(t,t_0)\,V(t) + R(t,t_0)\,V'(t)\\ &= A(t)\,X(t) + R(t,t_0)\,V'(t)\,.\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $R(t,t_0)\,V'(t) = C(t)\,.$ C'est-à-dire :

$$V'(t) = R(t_0,t)\,C(t) \iff V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0,s)\,C(s)\,ds.$$

Alors : $X_P(t) = R(t,t_0)\,V(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,t_0)\,R(t_0,s)\,C(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} R(t,s)\,C(s)\,ds.$

Théorème 2.1.3 *: La solution de $X'(t) = A(t)\,X(t) + C(t)$ qui passe par (t_0,V) est :*

$$X(t) = R(t,t_0)\,V + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\,C(s)\,ds.$$

Exemple 2.1.4 *: Résolvons le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = & (2t-1)\,x_1(t) + 2\,(t-1)\,x_2(t) + 2t\\ x_2'(t) = & (t-1)\,x_1(t) + (2-t)\,x_2(t) + t\end{cases}$$

Qu'on peut l'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2\,(t-1)\\ t-1 & 2-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t\\ t\end{pmatrix}$$

Où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2\,(1-t)\\ t-1 & 2-t\end{pmatrix}, \qquad C(t) = \begin{pmatrix} 2t\\ t\end{pmatrix}.$$

On a : $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = t.$

* *Si* $t \neq 1$:

Les vecteurs propres associés sont respectivement :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors, $A(t)$ *est diagonalisable* $\left(A(t) = P(t)\, D(t)\, P^{-1}(t)\right)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *matrice indépendante de* t.

$$D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $X = PZ$, *on obtient le système d'équations différentielles :*

$$Z'(t) = D(t)\, Z(t) + P^{-1}C(t) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) = & z_1(t) - 2t + 2t \\ z_2'(t) = & tz_2(t) + 2t - t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1'(t) = & z_1(t) \\ z_2'(t) = & tz_2(t) + t \end{cases}$$

Donc, on peut résoudre indépendamment les deux équations différentielles, d'après la méthode de la variation de la constante on obtient

$$\begin{cases} z_1(t) = & k_1 e^t \\ z_2(t) = & k_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}$$

D'où :

$$X(t) = PZ(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = & k_1 e^t + 2k_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 2 \\ x_2(t) = & k_1 e^t + k_2 e^{\frac{t^2}{2}} - 1 \end{cases}$$

2.2 Stabilité des systèmes non autonomes

Considérons le système différentiel non autonome suivant

$$\begin{cases} X'(t) = & F(t, X(t)), \; X \in U \subset \mathbb{R}^n \\ X(t_0) = & X_0, \qquad t_0 \in I \subset \mathbb{R} \end{cases} . \tag{2.5}$$

Définition 2.2.1 *: Un point d'équilibre p du système (2.5) est dit stable à t_0 si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R, t_0) > 0$ tel que*

$$\|X(t_0) - p\| < r \Rightarrow \|X(t) - p\| < R, \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

Dans le cas contraire le point d'équilibre p est dit instable.

Définition 2.2.2 *: Un point d'équilibre p est dit*

1. *Uniformément stable si pour tout $R > 0$, il existe un réel $r = r(R) > 0$ indépendant de t_0 tel que, pour tout t_0*

$$\|X(t_0) - p\| < r \Rightarrow \|X(t) - p\| < R, \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

2. *Asymptotiquement stable pour le système (2.5) à t_0, s'il est stable et s'il existe $r(t_0) > 0$ tel que si $\|X(t_0) - p\| < r(t_0)$ alors $\|X(t) - p\| \to 0$ quand $t \to +\infty$.*
3. *Globalement asymptotiquement stable si, pour tout t_0 et $X(t_0)$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = p$.*
4. *Exponentiellement stable, s'il existe α et β positifs tels que pour $X(t_0)$ proche de p on a*

$$\|X(t) - p\| \leq \alpha \|X(t_0) - p\| \exp(-\beta(t - t_0)), \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

5. *Globalement exponentiellement stable, s'il existe α et β positifs tels que pour tout t_0*

et $X(t_0)$ on a

$$\|X(t) - p\| \leq \alpha \|X(t_0) - p\| \exp(-\beta(t - t_0)), \quad \text{pour tout } t \geq t_0.$$

Exemple 2.2.1 *: Considérons le système*

$$x'(t) = -a(t)\,x(t),$$

dont la solution est donnée par

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$$

On en conclut que

1. *Le système est stable si $a(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$.*
2. *Le système est asymptotiquement stable si $\int_0^{+\infty} a(s)\,ds = \infty$.*
3. *Le système est exponentiellement stable s'il existe $T > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on a*
$$\int_{T}^{t+T} a(s)\,ds \geq M$$

Définition 2.2.3 *: Le point d'équilibre p est localement uniformément asymptotiquement stable si*

1. *Il est uniformément stable.*
2. *Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout R_1, R_2, avec $0 < R_2 < R_1 \leq R_0$, il existe $T(R_1, R_2) > 0$ tel que pour tout $t_0 \geq 0$, on a*

$$\|X(t_0) - p\| < R_1 \Rightarrow \|X(t) - p\| < R_2, \quad \text{pour tout } t \geq t_0 + T.$$

Remarque 2.2.1 *: La stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais la réciproque n'est pas vraie*

2.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire autonome soit asymptotiquement stable est que toutes les valeurs propres de la matrice du système aient leur partie réelle strictement négative. Cependant ce résultat n'est pas vrai pour les systèmes linéaires non autonomes (2.2).

En effet, considérons le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -x_1(t) + \exp(2t)\, x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_2(t) \end{cases} .$$

$\lambda = -1$ est une valeur propre double de la matrice du système, la solution de ce système est

$$\begin{cases} x_1(t) = & \exp(-t)\, x_1(0) + \frac{1}{2}\left(\exp(t) - \exp(-t)\right) x_2(0) \\ x_2(t) = & \exp(-t)\, x_2(0) \end{cases} ,$$

on a $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = \infty$, pour $x_2(t) \neq 0$, d'où le système est instable.

Cependant, il existe des théorèmes qui assurent la stabilité asymptotique des systèmes linéaires non autonomes.

Théorème 2.2.1 *: Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \geq 0$ et pour toute valeur propre λ de $A(t) + A(t)^T$, on a $\lambda \leq -\alpha$, alors le système (2.2) est asymptotiquement stable.*

La condition de stabilité asymptotique dans le théorème précédent est suffisante mais pas nécessaire, ce qui le prouve l'exemple suivant.

Exemple 2.2.2 *: Soit le système linéaire suivantes*

$$\begin{cases} x_1'(t) = & -x_1(t) + \exp(\frac{t}{2}) x_2(t) \\ x_2'(t) = & -x_2(t) \end{cases}$$

On a

$$A(t)+A(t)^T=\begin{bmatrix} -2 & \exp(\frac{t}{2}) \\ \exp(\frac{t}{2}) & -2 \end{bmatrix}.$$

Les valeur propre de $A(t)+A(t)^T$ *sont* $\left(-2-\exp(\frac{t}{2})\right)$ *et* $\left(-2+\exp(\frac{t}{2})\right)$.

La condition du théorème n'est donc pas vérifiée. Cependant la solution du système est

$$\begin{cases} x_1(t)= & \exp(-t)\,x_1(0)+\frac{1}{2}\left(\exp(-\frac{t}{2})-\exp(-t)\right)x_2(0) \\ x_2(t)= & -x_2(t) \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t)=0$. *Donc le système est asymptotiquement stable.*

Théorème 2.2.2 *: Supposons que pour* $t\geq 0$, *les valeurs propres de* $A(t)$ *sont à parties réelles négatives et qu'il existe* $\alpha>0$ *tel que* $\operatorname{Re}(\lambda)\leq-\alpha$ *pour toute valeur propre* λ *de* $A(t)$ *est bornée et vérifie*

$$\int_0^{+\infty} A^T(t)\,A(t)\,dt<\infty$$

alors le système est globalement exponentiellement stable et globalement asymptotiquement stable.

Citons un autre résultat valable lorsque le système linéaire est de la forme

$$X'(t)=(A_1+A_2(t))\,X(t) \tag{2.6}$$

Théorème 2.2.3 *: Supposons que* A_1 *soit constante, de Hurwitz et que* A_2 *vérifie*

$$\lim_{t\to+\infty} A_2(t)=0 \ \ et \ \int_0^{+\infty}\|A_2(t)\|\,dt<\infty,$$

alors le système (2.6) *est globalement exponentiellement stable.*

2.2.2 Système linéaires non autonomes "proches" d'un système linéaire autonome

L'un des objectifs de la théorie qualitative des systèmes différentiels est de connaître les propriétés de stabilité d'une solution même si la forme explicite de cette solution n'est pas connue.

Nous étudierons ici une possibilité de répondre à cette question lorsque le système linéaire non autonome étudié est "proche", dans un sens que l'on devra définir, d'un système linéaire autonome.

Soit le système linéaire $X' = A(t)X$.

Posons

$$A(t) = A + (A(t) - A) = A + B(t).$$

Nous supposons ici qu'il existe une matrice constante A telle que.

$$\lim_{t\to+\infty} \|A(t) - A\| = \lim_{t\to+\infty} \|B(t)\| = 0. \tag{2.7}$$

La condition (2.7) suggère que pour tout les grandes valeurs de t. La solution $X(t, t_0, X_0)$ du système $X'(t) = (A + B(t))X(t)$ soit peu différente de la solution $Y(t, X_0)$ du système autonome $Y' = AY$ et par conséquent que les propriétés asymptotiques des solutions des deux systèmes soient les mêmes.

En réalité, cette affirmation n'est pas nécessairement vérifiée comme le prouve l'exemple suivant.

Exemple 2.2.3 *: Soit l'équation différentielle du second ordre $x'' - 2x'/t + x = 0$ définie pour $t > 0$. Équivalente au système différentiel linéaire*

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X = (x_1, x_2 = x_1'),$$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2/t \end{pmatrix} = A + B(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2/t \end{pmatrix}.$

Pour $t > 0, \qquad \|B(t)\| = \dfrac{2}{t}$ *et* $\lim\limits_{t \to +\infty} \|B(t)\| = 0.$

La solution générale du système autonome $Y'(t) = AY(t)$ *où est donnée par*

$$Y(t) = \{y_1(t), y_2(t) = y_1'(t)\}$$

où

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)\cos t + y_2(0)\sin t \\ y_2(t) = -y_1(0)\sin t + y_2(0)\cos t \end{cases}$$

Le point fixe $Y = 0$ *est un centre stable pour le système linéarisé* $Y' = AY$ *dont toutes les solutions sont bornées, par contre les solutions du système* $X' = AX + B(t)X$ *sont non bornées ce qui montre qu'il n'existe pas, dans ce cas, d'équivalence entre ces deux systèmes.*

Nous préciserons, dans les théorèmes ci dessous certaines conditions d'équivalence d'un système linéaire non autonome et d'un système linéaire autonome qui lui est "proche".

Théorème 2.2.4 *Soit le système différentiel*

$$X' = AX + B(t)X \quad , \qquad \lim_{t \to +\infty} ||B(t)|| = 0 \tag{2.8}$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice A *ont leurs parties réelles strictement négatives, toutes les solutions du système* (2.8) *sont bornées et asymptotiquement stables.*

Théorème 2.2.5 *Soit le système différentiel*

$$X' = AX + B(t)X \quad , \qquad \int_{t_0}^{+\infty} ||B(t)||\, dt = M < \infty \tag{2.9}$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice A *ont leurs parties réelles négatives et si toutes* *les valeurs propres dont la partie réelle est nulle sont simples, toutes les solutions du système* (2.9) *sont bornées et stables.*

Remarque 2.2.2 *: Pour étudier la stabilité (au sens de Lyapunov) de la solution $X(t)$ définie par la donnée de $X(0)$ on doit étudier $\|Z(t) - X(t)\|$ où $Z(t)$ est définie par $Z(0) = X(0) + \Delta_0$.*

Les propriétés de stabilité des solutions de (2.4) sont donc les mêmes que celles des solutions de l'équations linéaire $Y' = A(t)y$.

2.2.3 Stabilité des systèmes non linéaires

Pour étudier la stabilité de système (2.5) on a deux méthodes :

Méthode directe de Lyapunov

Théorème 2.2.6 *: Soit 0 un point d'équilibre de* (2.5)*, s'il existe un voisinage ϑ_{t_0} et une fonction $V : \vartheta_{t_0} \to \mathbb{R}_+$ continue, ayant des dérivées partielles continues ; telle que :*

I- *V soit définie positive.*

II- *La dérivée totale V' pour* (2.5) *soit négative (respectivement définie négative)*

alors 0 est stable. V s'appelle une fonction de Lyapunov.
De plus, si on a :

III- *V est décrescente*

alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).
De plus si on a :

IV- *$U = \mathbb{R}^n$ et si V est radialement non borné*

alors 0 est globalement uniformément stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).

Exemple 2.2.4 *: On considère le système*

$$\begin{cases} x_1' = & -x_1 - \exp(-2t)\, x_2 \\ x_2' = & x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons :

$$V(t,x) = x_1^2 + (1 + \exp(-2t))\, x_2^2,$$

ce qui montre que :

$$V'(t,x) \leq -2\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) \leq -(x_1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

On en déduit alors que V' *est définie négative, et que* 0 *est uniformément asymptotiquement stable.*

Théorème 2.2.7 (Instabilité de Chetaev) *: Soit le système* (2.5)*, admettant l'origine pour équilibre. S'il existe un voisinage* ϑ_{t_0} *et une fonction* $V : \vartheta_{t_0} \to \mathbb{R}$ *continue ayant des dérivées partielles, telle que :*

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists X_0 \in B(0,\varepsilon)\,; \forall t > t_0 :\ V(t, X_0) \leq 0.$
2. V *est minorée sur* U' *un sous-domaine de* $U = \{x \in V_{t_0}; V(t,x) \leq 0, \forall t \geq t_0\}$,
3. *La dérivée totale* V' *pour le système* (2.5) *est définie négative sur* U' *alors l'origine est instable.*

Exemple 2.2.5 *: Soit le système :*

$$\begin{cases} x_1' = & x_1^3 + x_2^3 \\ x_2' = & x_1x_2^2 + x_2^3 \end{cases}.$$

L'origine est un point d'équilibre instable. En effet, posons

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right).$$

Le domaine U est défini par

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_2 \leq x_1 \leq x_2 \text{ ou } x_2 \leq x_1 \leq -x_2\}.$$

En définissant $U' = U \cap B(0, \varepsilon)$, V est minorée par $-\frac{\varepsilon^2}{2}$ et $V' = (x_1^4 - x_2^4) < 0$.
Sur ce domaine. Le théorème (2.2.7) permet alors de conclure quant à l'instabilité de l'origine.

Méthode inverse de Lyapunov

Théorème 2.2.8 (Théorème inverse de stabilité uniforme) *: On considère le système (2.5) avec $F \in C^0(\vartheta_{t_0})$ et $F \in Lip_{(X)}(\vartheta_{t_0})$ où 0 est un équilibre uniformément stable, alors il existe un voisinage $\vartheta'_{t_0} \subset \vartheta_{t_0}$ et une fonction de Lyapunov associée au système*

$$V : \vartheta'_{t_0} \to \mathbb{R}^+$$

telle que :

I- *V est décrescente,*

II- *$V \in Lip_{(t,X)}\left(\vartheta'_{t_0}\right)$.*

Remarque 2.2.3 *: Si l'on considère le système autonome (non linéaire), V peut être construite indépendamment de t.*

Théorème 2.2.9 (Théorèmes inverse de stabilité uniforme asymptotique) *: On considère le système (2.5) avec $F \in C^0(\vartheta_{t_0})$ et $F \in Lip_{(X)}(\vartheta)$ où 0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe un voisinage $\vartheta'_{t_0} \subset \vartheta_{t_0}$ et une fonction* *de Lyapunov associée au système :*

$$V : \vartheta'_{t_0} \to \mathbb{R}^+$$

telle que :

1. V *est décrescente,*
2. $V \in Lip_{(t,X)}\left(\vartheta'_{t_0}\right)$.
3. V' *est définie négative.*

Remarque 2.2.4 *: Dans le théorème précédent, on peut remplacer V' définie négative par :*

$$\exists c > 0; \forall (t, X) \in \vartheta'_{t_0}, V'(t, X) \leq -cV(t, X)$$

Théorème 2.2.10 *: On considère le système (2.5) avec $U = \mathbb{R}^n$, $F \in C^0(I \times \mathbb{R}^n)$ et $F \in Lip_{(X)}(\mathbb{R}^n)$ où 0 est un équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe une et une fonction de Lyapunov*

$$V : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

associée au système telle que :

1. V *est décrescente,*
2. $V \in Lip_{(t,X)}\left(\vartheta'_{t_0}\right)$.
3. V' *est définie négative.*
4. V *est radialement non bornée.*

Remarque 2.2.5 *: Dans le théorème précédent, on peut remplacer V' définie négative par :*

$$\exists c > 0; \forall (t, X) \in \vartheta'_{t_0}, V'(t, X) \leq -cV(t, X)$$

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude qualitative des systèmes différentiels non autonomes.

D'abord, on a calculé la solution exacte des systèmes différentiels linéaires dans les deux cas autonome et non autonome, puis on a exposé les méthodes directe et indirecte pour la stabilité des points d'équilibre. La stabilité des solutions périodiques ne sont pas étudiées et seront traitées peut être dans des travaux futurs.

Bibliographie

[Livre]

[1] Benoist-Gueutal, P. (2005). Mathématiques pour la physique : Introduction à la théorie qualitative des systèmes dynamiques ($Vol.4$).

[2] Demailly, J. P. (2016). Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed. EDP sciences.

[3] Hubbard, J (1999). Equations différentielles et systèmes dynamiques. © Cassini, Paris.

[4] Zerrik, E. H., & El Jai, A. (2014). Stabilité des systèmes dynamiques. Presses Universitaires de Perpignan.

[Site]

[5] Croce, G. (2010/2011). Cours Equations différentielles ordinaires : Master Maths-Info à l'Université du Havre.

[6] Frédéric, J. (2017/2018). Systèmes Dynamiques Stabilité et Commande : Cours et exercices corrigés.

[7] Moulay E. (2007). Stabilité Des Équations Différentielles Ordinaires : Cours de Master.

[Mémoires]

[8] Pujo-menjouet, L. Equations Différentielles Ordinaires et partielles. Université Claude Bernard, Lyon-I.

Annexe A : Classes des fonctions $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^{\infty}$ et $\mathcal{KL}$

Définition 2.2.4 *: Soit $a \in \mathbb{R}^{+} \backslash \{0\}$ et $\varphi : [0, a] \to \mathbb{R}_{+}$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe $\mathcal{K}$ si :*

1. *φ est strictement croissante.*
2. *$\varphi(0) = 0$.*

Définition 2.2.5 *: Soit $\varphi : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}_{+}$ une application continue, on dit que φ appartient à la classe $\mathcal{K}^{\infty}$ si :*

1. *φ est strictement croissante.*
2. *$\varphi(0) = 0$.*
3. *$\lim\limits_{r \to +\infty} \varphi(r) = +\infty$.*

Définition 2.2.6 *: Soit $a \in \mathbb{R}$ et*

$$\begin{array}{rccc} \beta : & [0, a] \times \mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R}^{+} \\ & (r, s) & \to & \beta(r, s) \end{array}$$

Une application continue, on dit que β appartient à la classe $\mathcal{KL}$ si :

1. *pour tout $s \in \mathbb{R}^{+}, r \to \beta(r, s)$ appartient à la classe $\mathcal{K}$.*
2. *pour tout $r \in [0, a]$, $s \to \beta(r, s)$ est décroissante.*

3. pour tout $r \in [0, a]$, $\lim\limits_{s \to +\infty} \beta(r, s) = 0.$

Définition 2.2.7 *: Une fonction* $\upsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est radialement non bornée si :*

$$\lim_{\|y\| \to +\infty} \upsilon(y) = +\infty$$

Une fonction $\upsilon : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est radialement non bornée si*

$$\lim_{\|y\| \to +\infty} \upsilon(t, y) = +\infty$$

Uniformément en t, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall y \in \mathbb{R}^n, (\|y\| > \delta) \Longrightarrow (\forall t \in I, \upsilon(t, y) > \varepsilon).$$

Dans le cas où υ est continue, on peut reformuler la définition sous une forme plus pratique :

Définition 2.2.8 *: Une fonction* $\upsilon : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continue est radialement non bornée s'il existe une fonction* φ *de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *telle que :*

$$\upsilon(t, y) \geq \varphi(\|y\|) \quad \forall t \in I, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 2.2.9 *: Une fonction* $\upsilon : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est décrescente si*

$$\lim_{\|y\| \to +\infty} \vartheta(t, y) = 0$$

uniformément en t*, c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall y \in U, (\|y\| < \delta) \Longrightarrow (\forall t \in I, \vartheta(t, y) < \varepsilon)$$

Dans le cas où ϑ est continue, on peut reformuler la définition sous une forme plus pratique :

Définition 2.2.10 *: Une fonction $\vartheta : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est décrescente si et seulement s'il existe un voisinage ϑ_{t_0} et une fonction ψ de classe $\mathcal{K}$ telle que :*

$$|\upsilon (t, y)| \leq \psi (\|y\|) \quad \forall (t, y) \in \vartheta_{t_0}.$$

Définition 2.2.11 *: Une fonction $V : I \times U \to \mathbb{R}$ est dite semi-définie positive (respectivement semi-définie négative) s'il existe un voisinage ϑ de 0 tel que :*

1. $\forall t \in I$, $V (t, 0) = 0$
2. $\forall t \in I$, $\forall y \in \vartheta, V(t, y) \geq 0$ *(respectivement $V(t, y) \leq 0$).*

Elle est dite définie positive (respectivement définie négative) s'il existe un voisinage ϑ de 0 tel que :

1. $V (t, 0) = 0$
2. *il existe $V_0 : \vartheta \to \mathbb{R}$ définie positive telle que :*

$$\forall t \in I, \forall y \in \vartheta, \quad V (t, y) \geq V_0 (y)$$

(respectivement $V (t, y) \leq V_0 (y)$).

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$e^A, \exp$	Fonction exponentielle
X_0	Condition initiale
$R(t, t_0)$	La résolvante
$B(x, \varepsilon)$	La boule de centre x et de rayon ε
$Lip(t, X)$	L'ensemble des fonctions localement Lipshisienne en la $1^{ére}$ et la $2^{éme}$ variable
$V(X)$	Fonction de Lyapunov
$Ker(A)$	Noyau de A
P^{-1}	Inverse de A
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Dérivée partielle de f par rapport à x_i
$\operatorname{Re}(\lambda)$	Réelle de λ