

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Semahi Inesse

Titre :

Résolution Numérique des systèmes non linéaires

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Chemchem Madani	UMKB	Président
Dr. Radjeh Fouzia	UMKB	Encadreur
Dr. Bouziane Nadjet	UMKB	Examineur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

Mes frères et ma soeur qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné
la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Un grand remerciement spécial pour mon encadreur "RADJEH FOUZIA" pour avoir
dirigé ce travail et pour ses orientations et ses judicieux conseils et pour son soutien et
son aide jusqu'à la fin

Je n'oublie pas mes parents pour leurs contributions, leur soutien et leur patiences.
Je remercie mes amis, mes collègues et mon amie sur social media pour aide moi jusqu'à
la fin.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Equations non linéaires	3
1.1 Méthode de point fixe	3
1.2 Méthode de Newton	8
1.3 Méthode de la sécante	12
2 Calculs numériques des systèmes non linéaires	13
2.1 Méthode de point fixe	13
2.1.1 Point fixe de contraction	13
2.1.2 Point fixe de contraction avec relaxation	16
2.2 Méthode de Newton	18
2.2.1 Construction de la méthode	18
2.2.2 Convergence de la méthode de Newton	20
2.3 Méthode de la sécante	24
3 Application	26

3.1	Commande de l'onduleur de tension monophasé	26
3.2	Onduleur triphasé	31
3.3	Méthode d'optimisation de Newton-Raphson	32
	Conclusion	36
	Bibliographie	37

Table des figures

3.1	Onduleur monophasé d'élimination harmonique à trois niveaux	26
3.2	Signaux des interrupteurs d'un onduleur à trois niveaux	27
3.3	Motif adopté pour éliminer C-1 harmoniques	29
3.4	Onduleur triphasé à élimination d'harmoniques	31
3.5	Variation des angles de commutation en fonction de taux de modulation m.	34
3.6	La variation de l'erreur de la méthode de Newton-Raphson en fonction du taux de modulation m	35

Introduction

Le problème qu'on va étudier dans ce mémoire joue un rôle très important dans les différents domaines scientifiques. Donc, ils sont sans doute plus fréquents que les phénomènes linéaires.

Il est connu que le problème de résolution des systèmes non linéaires est très coûteux, c'est-à-dire : on ne peut pas garantir la complexité de calculs en fonction de la dimension du système et d'assurer la convergence vers la solution correcte.

A cette raison, on propose quelques méthodes numériques de résolution des équations et des systèmes non linéaires. Ces méthodes sont connues également sous forme des suites itératives à partir d'une valeur initiale. On donne aussi les propriétés de chaque méthode et les conditions nécessaires pour assurer la convergence vers la solution exacte ; tout ça pour faire une petite comparaison entre ces méthodes afin de choisir la meilleure entre eux.

Pour aboutir à notre but, on décompose ce mémoire en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la résolution des équations non linéaires ; c'est le problème dans le cas unidimensionnel. On expose les trois méthodes connues dans la littérature (point fixe, Newton, la sécante) et on étudie les propriétés de chaque méthode comme la contraction de point fixe, la convergence quadratique local et global de Newton et les caractéristiques de sécante.

Dans le deuxième chapitre, on fait une généralisation dans le cas multidimensionnels ; c'est-à-dire la résolution des systèmes non linéaires. Dans ce cas, on propose toujours les mêmes méthodes et on étudie aussi la contraction de point fixe et la convergence de classe C1 et C2 de Newton-Raphson. Les méthodes de type Newton n'ont qu'une convergence locale dans le sens que l'estimation initiale doit être assez proche de la solution.

Dans le troisième chapitre, on donne une application dans le domaine d'électronique sur un onduleur triphasé dans lequel, on applique la méthode de Newton-Raphson pour résoudre le système non linéaire obtenu.

Chapitre 1

Equations non linéaires

Les problèmes scientifiques impliquent souvent la résolution d'une ou de plusieurs équations non linéaires qui sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Dans ce chapitre, nous intéressons à l'approximation des zéros d'une fonction réelle $f(x) = 0$.

Analytiquement, il est difficile de trouver la solution exacte de l'équation $f(x) = 0$, ce qui fait que toutes les méthodes de recherche d'une racine sont des méthodes itératives en se servant de convergence.

Dans les sections suivantes, on propose les méthodes les plus utilisées dans la littérature pour résoudre une équation non linéaire.

1.1 Méthode de point fixe

Dans cette méthode, on construit à partir de l'équation à résoudre $f(x) = 0$ la suite itérative :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n), \end{cases}$$

si on assure la convergence de cette suite, elle tendre vers la solution \bar{x} du problème. La limite de cette suite vérifie la relation $\bar{x} = g(\bar{x})$.

Définition (1.1) : un point fixe d'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un réel \bar{x} ; solution de l'équation $x = g(x)$.

L'idée principale de cette méthode est de transformer l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$, Alors le problème de résolution de l'équation non linéaire $f(x) = 0$ est équivalent à la recherche des points fixes de $g(x)$.

Définition (1.2) : On dit que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est contractante sur \mathbb{R} , s'il existe un $k \in]0, 1[$, tel que : pour tous x et y éléments de \mathbb{R} , on a :

$$|g(x) - g(y)| \leq k |x - y|.$$

Si l'inégalité est stricte, on dira que g est strictement contractante; k est appelé rapport de contraction.

Propriété : Soit g une application dérivable sur l'intervalle $[a, b]$; si la dérivée g' vérifie :

$$\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| = k < 1,$$

alors g est strictement contractante dans $[a, b]$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de la convergence du processus des approximations successives.

Théorème (1.1) : (point fixe contractant) : g est une fonction k -contractante sur $[a, b]$ et à valeurs dans $[a, b]$ et $(x_n)_n$ la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n); \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Alors :

1. la suite (x_n) converge vers un réel \bar{x} .
2. la fonction g admet un point fixe unique.

3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$. \diamond

Preuve : Premièrement et par hypothèse, on a : $x_0 \in [a, b]$ et $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$, donc il est évident que $x_n \in [a, b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, si on utilise le fait que g soit une fonction k -contractante, on obtient immédiatement l'inégalité :

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k |x_n - x_{n-1}|,$$

pour tout $n \geq 1$. Par récurrence fini, on obtient facilement la relation suivante :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|, \quad (1.1)$$

pour tout $n \geq 0$. A l'aide de 1.1, on veut montrer que la suite (x_n) vérifie :

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|.$$

En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq k^{n+p-1} |x_1 - x_0| + k^{n+p-2} |x_1 - x_0| + \cdots + k^{n+1} |x_1 - x_0| + k^n |x_1 - x_0| \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i} |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|, \end{aligned} \quad (1.2)$$

l'inégalité 1.2, nous permet de prouver que la suite (x_n) est de Cauchy de la manière suivante :

Puisque k^n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$: il existe n_0 , tel que : pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$k^n \leq \frac{1-k}{|x_1 - x_0|} \varepsilon.$$

Par une multiplication par $|x_1 - x_0|$ et une division par $(1 - k)$, on obtient :

$$\frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 , tel que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$|x_{n+p} - x_n| \leq k^n \frac{1 - k}{|x_1 - x_0|} \leq \varepsilon.$$

L'inégalité précédente, nous permet de conclure que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et par conséquent, elle converge vers une limite \bar{x} . Parce que la fonction g est continue sur $[a, b]$ et la suite $x_n \in [a, b]$ de terme général $x_{n+1} = g(x_n); \forall n \in \mathbb{N}$, alors, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x} = g(\bar{x}).$$

Dans ce qui suit, on essaye de démontrer l'unicité de ce point fixe. Supposons que g admet un autre point fixe x^* différent de \bar{x} , alors on a :

$$|g(x^*) - g(\bar{x})| = |x^* - \bar{x}| \leq k |x^* - \bar{x}|,$$

ce qui est équivalent à : $(1 - k) |x^* - \bar{x}| \leq 0$, on trouve une contradiction par le fait que $k < 1$, alors $x^* = \bar{x}$.

Enfin, on veut démontrer la dernière inégalité du théorème en faisant tendre p vers l'infini dans l'inégalité suivante :

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|,$$

on trouve directement

$$|\bar{x} - x_n| \leq \frac{k^n}{1 - k} |x_1 - x_0|; \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \blacklozenge$$

Proposition (1.2) : $\bar{x} \in [a, b]$ est un point fixe d'une fonction $g \in C^1([a, b])$.

1. Si $|g'(\bar{x})| < 1$, alors il existe un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ contenant \bar{x} pour lequel la suite définie par $x_0 \in [\alpha, \beta]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers \bar{x} (attractif).

2. Si $|g'(\bar{x})| > 1$, alors pour tout $x_0 \neq \bar{x}$, la suite définie par x_0 et $x_{n+1} = g(x_n)$ ne converge pas vers \bar{x} (répulsif). \diamond

Preuve : Dans le cas où $|g'(\bar{x})| < 1$ et comme g' est continue, donc il existe $\varepsilon > 0$ et $k < 1$, tel que :

$$|g'(\bar{x})| < k; \text{ pour tout } x \in [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]. \quad (1.3)$$

On note $I = [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$ et on considère deux éléments quelconques x et y . On a :

$$|g(x) - g(y)| = \left| \int_y^x g'(t) dt \right| \leq \max_{t \in I} |g'(t)| \cdot |x - y|. \quad (1.4)$$

Si en tenant compte la formule 1.3, on obtient :

$$|g(x) - g(y)| \leq k |x - y|.$$

Comme y est arbitraire, on peut prendre $y = \bar{x}$ et par 1.4, on trouve :

$$|g(x) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x})| \leq k |x - \bar{x}| \leq |x - \bar{x}| \leq \varepsilon.$$

Ce qui démontre que $g(x)$ appartient à I , c'est à dire : x aussi est dans I .

Par hypothèse, g' est continue sur I , alors : il existe $\delta > 0$; tel que :

$\forall x \in I, |\bar{x} - x| < \delta \Rightarrow |g'(x)| > 1$. On essaye de démontrer par l'absurde; soit $x_0 \in I$ et supposons que la suite $(x_n)_n$ converge vers \bar{x} . Alors, il existe un rang N_0 (qui dépend de δ); tel que : $\forall n \geq N_0$, on a :

$$|x_n - \bar{x}| \leq \delta \text{ et } |g'(x_n)| > 1.$$

D'après le théorème des accroissement finis, il existe $C_n \in]x_n, \bar{x}[$; tel que :

$$|g(x_n) - g(\bar{x})| = g'(C_n) |x_n - \bar{x}|.$$

Alors, pour tout $n \geq N_0$, on a :

$$|x_{n+1} - \bar{x}| = |g(x_n) - g(\bar{x})| = |g'(C_n)| |x_n - \bar{x}| > |x_n - \bar{x}|.$$

Si pour tout $n \leq N_0$, on a $x_n \neq \bar{x}$. Mais la suite $(x_n)_n$ converge vers \bar{x} , donc c'est une contradiction. Donc notre supposition est fausse. \blacklozenge

1.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton s'appelle aussi méthode des tangents est une approche systématique pour résoudre numériquement une équation $f(x) = 0$ dans le cas où f est dérivable. Graphiquement, au voisinage d'un point x , la courbe de f est proche de sa tangente d'équation :

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x)$$

et on peut approcher un point où f s'annule par celui où la tangente s'annule, c'est à dire :

$$y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

A partir d'une valeur initiale x_0 , on peut créer des itérations de ce procédé, on trouve alors la suite de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \forall n \geq 0.$$

La méthode itérative a une importance si elle converge; a cette raison, il faut assurer la convergence de cette méthode comme l'indique le théorème suivant :

Théorème (1.3) (*convergence quadratique locale*) : On considère la fonction f définie sur $I : [a, b]$ de classe C^2 et $\bar{x} \in I$; tel que : $f(\bar{x}) = 0$ mais $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Soient m et $M > 0$; tels que : $|f'(\bar{x})| \geq m$ et $|f''(x)| \leq M$; $\forall x \in I$. On pose : $C = \frac{M}{2m}(b - a)$.

Soit $x_0 \in I$, on suppose que la suite définie par la méthode de Newton à partir de x_0 est bien définie, est à valeurs dans I et converge vers \bar{x} . Alors, on a :

$$* |x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{M}{m} \frac{(\bar{x} - x_n)^2}{2}, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

$$* |x_n - \bar{x}| \leq \frac{2m}{M} C^{2^n}, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

* Si de plus $C < 1$, on trouve :

$$\forall \varepsilon > 0, n \geq \ln \left[\ln \left(\frac{M\varepsilon}{2m} \right) / \ln C \right] / \ln 2 \Rightarrow |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon. \quad \diamond$$

Preuve : Lorsqu'on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur f au point x_n , on trouve :

$$f(\bar{x}) = f(x_n) + (\bar{x} - x_n)f'(x_n) + \frac{(\bar{x} - x_n)^2}{2}f''(C_n),$$

avec C_n entre x_n et \bar{x} . Si on divise les deux membres de l'égalité par $f'(x_n)$ et en tenant compte que $f(\bar{x}) = 0$, on obtient :

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \bar{x} + x_n = \frac{(\bar{x} - x_n)^2}{2} \frac{f''(C_n)}{f'(x_n)},$$

c'est à dire :

$$x_{n+1} - \bar{x} = \frac{(\bar{x} - x_n)^2}{2} \frac{f''(C_n)}{f'(x_n)},$$

ce qui nous permet d'impliquer :

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{|x_n - \bar{x}|^2}{2} \frac{M}{m}.$$

Le deuxième point s'en déduit alors par une simple récurrence.

Pour $n = 0$: on a bien l'inégalité suivante :

$$|x_0 - \bar{x}| \leq (b - a) = \frac{2m}{M}C.$$

On suppose maintenant que cette inégalité est vraie pour n et on démontre qu'elle est vraie pour $(n + 1)$, c'est à dire :

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{2m}{M}C^{2^n}.$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \bar{x}| &\leq (\bar{x} - x_n)^2 \frac{M}{2m} \\ &\leq \left(\frac{2m}{M}C^{2^n}\right)^2 \frac{M}{2m} \\ &\leq \frac{2m}{M}C^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

ceci permet de conclure la démonstration du second point du théorème.

Pour démontrer le reste, on suppose que : $C < 1$ et $\varepsilon > 0$. D'après les estimations précédentes on a : $|\bar{x} - x_n| < \varepsilon$, dès que :

$$\frac{2m}{M}C^{2^n} < \varepsilon,$$

c'est à dire :

$$n \ln 2 \geq \ln \left[\left(\frac{M\varepsilon}{2m} \right) / \ln C \right]. \quad \blacklozenge$$

Théorème (1.4) (*convergence global*) : f est une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ satisfaisant les conditions suivantes :

i/ $f(a) \cdot f(b) < 0$.

ii/ $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ strictement monotone.

iii/ $f''(x) \geq 0$ (ou ≤ 0) convexité ou concavité.

iv/ $\frac{|f(a)|}{|f'(a)|} < b - a$ et $\frac{|f(b)|}{|f'(b)|} < b - a$.

Alors, la méthode de Newton converge vers l'unique solution \bar{x} de $f(x) = 0$ dans $[a, b]$. \diamond

Preuve : On traite tout d'abord le cas où : $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) \geq 0$ (les autres cas se traitent de façon similaire). D'après (i) et (ii), il existe une solution unique $\bar{x} \in [a, b]$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} &= x_n - \bar{x} + \frac{f(\bar{x}) - f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{1}{2} (x_n - \bar{x})^2 \frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_n)}; \text{ avec } x_n \leq \varepsilon \leq \bar{x}. \end{aligned}$$

Par conséquent le signe de $x_{n+1} - \bar{x}$ est celui de $\frac{f''(\varepsilon)}{f'(x_n)}$; si $f' > 0$ et $f'' \geq 0$, alors : $x_{n+1} > \bar{x}$; $\forall n$, (x_n) est donc minorée par \bar{x} à partir de x_1 . Par ailleurs, on a deux possibilités de choix de x_0 :

Si $x_0 > \bar{x}$, alors :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

(puisque $f(x_0) > f(\bar{x}) = 0$) et $x_n > \bar{x}$ avec $f(x_n) > f(\bar{x}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Si $x_0 < \bar{x}$, alors $f(x_0) < 0$ d'où

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0.$$

Mais, on a aussi $x_1 > \bar{x}$ et $f(x_1) > 0$ et par suite :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1.$$

Donc, à partir du point de départ x_0 , on aura encore une suite décroissante minorée donc convergente. \blacklozenge

1.3 Méthode de la sécante

L'idée principale dans la troisième méthode de la résolution d'une équation non linéaire $f(x) = 0$ et d'éviter le calcul de la dérivée de f .

Si on applique la formule de Taylor d'ordre 1, on obtient l'approximation suivante :

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Par le remplacement direct de cette approximation dans la suite de Newton, on obtient celle de la méthode de la sécante suivante :

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ donnés dans } I, x_0 \neq x_1 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \end{cases}$$

Théorème (1.5) : f est une fonction de classe $C^2(I)$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une racine \bar{x} , tel que : $f'(\bar{x}) \neq 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, où x_0 satisfait $|\bar{x} - x_0| \leq \varepsilon$, la suite $(x_n)_n$ définie par la méthode de la sécante converge vers \bar{x} et on a :

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq C |\bar{x} - x_n|^p,$$

où p est le nombre d'or $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.62\right)$. \diamond

Chapitre 2

Calculs numériques des systèmes non linéaires

Dans ce chapitre, on introduit et on analyse des méthodes et des algorithmes de résolution des systèmes d'équations non linéaires.

La forme générale d'un système d'équations non linéaires toujours en dimension finie et la fonction g de \mathbb{R}^n à valeur dans \mathbb{R}^n ; c'est-à-dire : toutes les méthodes qu'on va proposer dans ce chapitre traitent le problème suivant :

$$g(x) = 0; \text{ où } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

2.1 Méthode de point fixe

On commence par la méthode la plus utilisée et l'on distingue deux cas :

2.1.1 Point fixe de contraction

On définit la fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ par $f(x) = x + g(x)$, où g est de classe C^1 de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^n , c'est-à-dire : $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On peut alors remarquer que $g(x) = 0$ si

et seulement si $f(x) = x$, donc la résolution du système non linéaire 2.1 revient à trouver un point fixe de f .

La question qui se pose ici est l'existence de tel point fixe. La réponse de cette question sera donnée dans le théorème suivant :

Théorème (2.1) : *Soient E un espace métrique complet munit de la distance d , et $f : E \rightarrow E$ une fonction strictement contractante, c'est-à-dire : il existe $k \in]0, 1[$, tel que :*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y); \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Alors, il existe un unique point $\bar{x} \in E$ qui vérifie $f(\bar{x}) = \bar{x}$. De plus, la suite de terme général $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$ converge vers ce point \bar{x} pour tout $x^{(0)} \in E$. \diamond

Preuve : La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes :

Etape 1 : Existence de \bar{x} et convergence de la suite.

On donne un vecteur initial $x^{(0)} \in E$ et $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$ pour $n \geq 0$. On va montrer que :

1. $(x^{(n)})_n$ est de Cauchy (donc convergente car E est complet).
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{(n)} = \bar{x}$ est un point fixe de f .

On commence tout d'abord par le premier point. Par hypothèse, on sait que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) = d(f(x^{(n)}), f(x^{(n-1)})) \leq kd(x^{(n)}, x^{(n-1)}).$$

Par récurrence finie sur n , on obtient :

$$d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) \leq k^n d(x^{(1)}, x^{(0)}); \forall n \geq 0.$$

Soit $n \geq 0$ et $p \geq 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}
 d(x^{(n+p)}, x^{(n)}) &\leq d(x^{(n+p)}, x^{(n+p-1)}) + \dots + d(x^{(n+1)}, x^{(n)}) \\
 &\leq \sum_{q=1}^p d(x^{(n+q)}, x^{(n+q-1)}) \leq \sum_{q=1}^p k^{n+q-1} d(x^{(1)}, x^{(0)}) \\
 &\leq d(x^{(1)}, x^{(0)}) k^n (1 + k + \dots + k^{p-1}) \\
 &\leq d(x^{(1)}, x^{(0)}) \frac{k^n}{1-k} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty \text{ car } k < 1.
 \end{aligned}$$

La suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \geq 1 : d(x^{(n+p)}, x^{(n)}) \leq \varepsilon.$$

Comme E est complet, on a donc $x^{(n)}$ tend vers \bar{x} dans E quand n tend vers $+\infty$. parce que la fonction f est strictement contractante, elle est continue, donc : on a aussi $f(x^{(n)})$ tend vers $f(\bar{x})$ dans E quand n tend vers $+\infty$. Ensuite, on passe à la limite dans l'égalité $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$, on en déduit que $\bar{x} = f(\bar{x})$.

Etape 2 : Unicité

Soit \bar{x} et \bar{y} deux points fixes de f , qui satisfont donc $\bar{x} = f(\bar{x})$ et $\bar{y} = f(\bar{y})$, alors :

$$d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y}) \leq k \cdot d(\bar{x}, \bar{y}).$$

Comme $k < 1$, ceci est impossible sauf si $\bar{x} = \bar{y}$. ♦

La méthode de point fixe connue aussi sous le nom : *méthode des itérations successives*.

Dans ce qui suit, on prend $E = \mathbb{R}^n$, et la distance associée à la norme euclidienne qu'on note $|\cdot|$ et qu'elle vérifie : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;

$$d(x, y) = |x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n).$$

Dans le cas où f n'est pas contractante, on cherche à trouver les conditions sur g pour que f soit strictement contractante.

2.1.2 Point fixe de contraction avec relaxation

On donne un paramètre $w \neq 0$, on définit $f_w(x) = x + wg(x)$ et on remarque que x est une solution du système 2.1 si et seulement si x est un point fixe de $f_w(x)$. Le théorème suivant présente les conditions nécessaires pour que f_w soit strictement contractante.

Théorème (2.2) : *On désigne par $|\cdot|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n . Soit $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, telle que :*

$$\exists \alpha > 0 : (g(x) - g(y))(x - y) \leq -\alpha |x - y|^2 ; \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

$$\exists M > 0 : |g(x) - g(y)| \leq M |x - y| ; \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Alors, la fonction f_w est strictement contractante si $0 < w < \frac{2\alpha}{M^2}$, il existe donc un et un seul $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, tel que : $g(\bar{x}) = 0$ et $x^{(n)}$ tend vers \bar{x} quand n tend vers $+\infty$, avec :

$$x^{(n+1)} = f_w(x^{(n)}) = x^{(n)} + wg(x^{(n)}); n \geq 0. \quad \diamond$$

Remarque : *Le théorème précédent permet de montrer que sous les hypothèses 2.2 et 2.3 et pour $w \in \left]0, \frac{2\alpha}{M^2}\right[$, on peut obtenir la solution de 2.1 en construisant la suite :*

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(n+1)} = x^{(n)} + wg(x^{(n)}) \end{cases} \quad (2.4)$$

On peut aussi écrire cette suite de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(n+1)} = f(x^{(n)}) ; \forall k \geq 0 \\ x^{(n+1)} = w\tilde{x}^{(n+1)} + (1-w)x^{(n)}. \end{cases} \quad (2.5)$$

En effet, si $x^{(n+1)}$ est donné par la suite 2.5 alors :

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= w\tilde{x}^{(n+1)} + (1-w)x^{(n)} \\ &= wf(x^{(n)}) + (1-w)x^{(n)} \\ &= wg(x^{(n)}) + x^{(n)} \end{aligned}$$

Le procédé de construction de la suite 2.5 est l'algorithme de relaxation sur f .

Preuve : On veut montrer que f est strictement contractante dans le cas où $0 < w < \frac{2\alpha}{M^2}$; c'est à dire : f vérifie la formule suivante :

$$|f_w(x) - f_w(y)| = |x - y + w(g(x) - g(y))| \leq k|x - y|$$

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $k < 1$. Mettre le premier terme en carré on trouve :

$$\begin{aligned} |f_w(x) - f_w(y)|^2 &= |x - y + w(g(x) - g(y))|^2 \\ &= (x - y + w(g(x) - g(y)))(x - y + w(g(x) - g(y))) \\ &= |x - y|^2 + 2|x - y|(w(g(x) - g(y))) + w^2|g(x) - g(y)|^2. \end{aligned}$$

Si on suppose que g est lipchitzienne de constante de lipchitz M :

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|; \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

alors

$$|x - y + w(g(x) - g(y))|^2 \leq (1 + w^2M^2)|x - y|^2 + 2|x - y|(w(g(x) - g(y))).$$

Pour que $|x - y + w(g(x) - g(y))|^2 \leq k|x - y|^2$, avec $k < 1$ soit vérifiée, il faut démontrer que le terme $2(x - y)(w(g(x) - g(y)))$ soit de la forme $-\alpha|x - y|^2$, avec α strictement positif.

Pour obtenir ceci, on va supposer de plus que :

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que : } (g(x) - g(y))(x - y) \leq -\alpha |x - y|^2; \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

On obtient alors : $|x - y + w(g(x) - g(y))|^2 \leq (1 + w^2 M^2 - 2w\alpha) |x - y|^2$,

donc la fonction f_w est strictement contractante si $1 + w^2 M^2 - 2w\alpha < 1$ ce qui est vérifié

$$\text{si } 0 < w < \frac{2\alpha}{M^2}. \quad \blacklozenge$$

2.2 Méthode de Newton

La méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations non linéaires est une généralisation de l'algorithme de Newton qu'on a vu dans le premier chapitre et qui cherche à trouver les zéros d'une fonction unidimensionnelle.

2.2.1 Construction de la méthode

La méthode de Newton est souvent aussi appelée méthode de Newton-Raphson. On considère une fonction à plusieurs variables $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et on définit le système d'équations comme suite :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x) = 0. \end{cases}$$

On essaye d'approcher la solution \bar{x} par la suite $(x^{(n)})_n$. On introduit la matrice Jacobienne en $x^{(n)}$:

$$J_g(x^{(n)}) = Dg(x^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x^n)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x^n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x^n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x^n)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x^n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x^n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x^n)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(x^n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n(x^n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Notre but ici est d'approcher le plus possible la solution exacte $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ par $x^{(n+1)}$, pour aboutir à ce but, on approche $g(x)$ dans le voisinage de $x^{(n)}$ par une fonction affine :

$$g(x) = g(x^{(n)}) + Dg(x^{(n)})(x - x^{(n)}).$$

La résolution de notre problème est de trouver le vecteur x qui vérifie l'équation vectorielle suivante :

$$g(x^{(n)}) + Dg(x^{(n)})(x - x^{(n)}) = 0,$$

c'est à dire :

$$x = x^{(n)} - (Dg(x^{(n)}))^{-1} g(x^{(n)}).$$

On remarque bien que cette dernière formule est une généralisation de la formule de Newton unidimensionnelle. On construira alors un nouveau modèle local autour de la valeur obtenue pour x . A l'itération n on a :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - (Dg(x^{(n)}))^{-1} g(x^{(n)}).$$

L'algorithme de Newton de construction d'une suite $(x^{(n)})_n \in \mathbb{R}^n$ qui converge vers \bar{x} s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Donc le problème se ramène à la solution du système linéaire suivant :

$$Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}).$$

2.2.2 Convergence de la méthode de Newton

Il est clair que cette méthode basée sur la convergence pour trouver la valeur approchée de \bar{x} , à cette raison, on présente le théorème suivant qui résume les conditions de cette convergence.

Théorème (2.3) : Soient $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, tels que : $g(\bar{x}) = 0$. On munit \mathbb{R}^n d'une norme $\|\cdot\|$ et on suppose que $Dg(\bar{x})$ est inversible ; alors, la méthode de Newton converge localement et la convergence est au moins quadratique. Plus précisément : il existe $r > 0$ et $\beta > 0$, tels que :

1. Si $x^{(0)} \in \beta(\bar{x}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - \bar{x}\| < r\}$, alors la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par 2.6 et $x^{(n)} \in \beta(\bar{x}, r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Si $x^{(0)} \in \beta(\bar{x}, r)$ et si la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par 2.6, alors $(x^{(n)})$ tend vers \bar{x} quand n tend vers $+\infty$.

3. Si $x^{(0)} \in \beta(\bar{x}, r)$ et si la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par 2.6, donc

$$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| \leq \beta \|x^{(n)} - \bar{x}\|^2; \forall k \in \mathbb{N}. \quad \diamond$$

Preuve : Premièrement, on démontre la convergence au voisinage de \bar{x} ($x^{(0)}$ et proche de \bar{x}).

On peut réaliser ça à l'aide du théorème du point fixe : f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie par : $x \rightarrow x - (Dg(x^{(n)}))^{-1} g(x^{(n)})$, on a :

$$Df(\bar{x}) = Id - (Dg(\bar{x}))^{-1} Dg(\bar{x}) = 0,$$

comme $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, donc la fonction f est de Class C^1 . Puisque Df est continue alors :

$$\text{il existe } r > 0; \text{ tel que : } \|Df(x)\| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } x \in \beta(\bar{x}, r).$$

D'après le théorème du point fixe, il reste à démontrer que $f(\beta) \subset \beta$, pour que la suite définie par 2.6 soit convergente.

En effet, soit $x = x^{(n)} \in \beta$ et $y = x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$. Grace au théorème des accroissements

finis dans des espaces vectoriels normés suivants :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés, $h \in C^1(E, F)$ et $(x, y) \in E^2$. On définit $]x, y[= \{tx + (1-t)y; t \in]0, 1[\}$. Alors : $\|h(y) - h(x)\| \leq \|y - x\| \sup_{z \in]x, y[} \|Dh(z)\|$.

On a :

$$\|y - \bar{x}\| = \|f(x) - f(\bar{x})\| \leq \sup_{z \in \beta} \|Df(z)\| \|x - \bar{x}\|. \quad (2.7)$$

Par conséquence :

$$\|y - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2} \|x - \bar{x}\|,$$

c'est-à-dire : $y \in \beta$, ce qui implique que $f(\beta) \subset \beta$, alors la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par 2.6 est convergente.

On utilise le même argument (accroissement finis) pour démontrer la convergence quadratique de cette suite. Par hypothèse, on a : $Df \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, donc :

$$\|Df(z)\| = \|Df(z) - Df(\bar{z})\| \quad (2.8)$$

$$\leq \sup_{\varepsilon \in \beta} \|Df(\varepsilon)\| \cdot \|z - \bar{x}\| \quad (2.9)$$

$$\leq \beta \|x - \bar{x}\| \quad (2.10)$$

Par substitution directe de cette majoration de $\|Df(z)\|$ dans 2.7, on obtient alors :

$$\|y - \bar{x}\| \leq \beta \|x - \bar{x}\|^2$$

Ce qui donne la convergence locale au moins quadratique. \blacklozenge

Parce que la condition $g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est une condition suffisante mais pas nécessaire, donc on peut démontrer la convergence sous des conditions plus faciles à vérifier en pratique.

Théorème (2.4) (*convergence de la méthode de Newton, $g \in C^1$*) : Soient $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, tel que $g(\bar{x}) = 0$. On munit \mathbb{R}^n d'une norme $\|\cdot\|$ en $M_n(\mathbb{R})$ de la norme induite.

On suppose que $Dg(\bar{x})$ est inversible ; de plus, il existe $a_1, a_2, a \in \mathbb{R}_+^*$; tel que :

1. Si $x \in \beta(\bar{x}, a)$, alors $Dg(x)$ est inversible et $\|(Dg(x))^{-1}\| \leq a_1$.
2. Si $x, y \in \beta(\bar{x}, a)$, alors $\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| \leq a_2 \|y - x\|^2$.

Si on pose $r = \min\left(a, \frac{1}{a_1 a_2}\right) > 0$, $\beta = a_1 a_2$ et $x^{(0)} \in \beta(\bar{x}, r)$, on a :

- a. $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie par 2.6.
- b. $x^{(n)}$ tend vers \bar{x} lorsque n tend vers $+\infty$.
- c. $\|x^{(n+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(n)} - \bar{x}\|^2$; $\forall n \in \mathbb{N}$. \diamond

Preuve : Supposant que le vecteur initial $x^{(0)} \in \beta(\bar{x}, r) \subset \beta(\bar{x}, a)$, où $r \leq a$ et on montre par récurrence que $x^{(n)} \in \beta(\bar{x}, r)$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et que $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

En effet, si $x^{(n)}$ est bien définie et $x^{(n)} \in \beta(\bar{x}, r)$, on veut montrer que $x^{(n+1)}$ est bien définie et $x^{(n+1)} \in \beta(\bar{x}, r)$. Comme $r \leq a$, la matrice $Dg(x^{(n)})$ est inversible et $x^{(n+1)}$ est donc bien définie, on a alors :

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} = (Dg(x^{(n)}))^{-1} (-g(x^{(n)})).$$

Pour montrer que $x^{(n+1)} \in \beta(\bar{x}, r)$, on va utiliser la fait que $r < \frac{1}{a_1 a_2}$. Par hypothèse, on sait que si $x, y \in \beta(\bar{x}, a)$, on a :

$$\|g(y) - g(x) - Dg(x)(y - x)\| \leq a_2 \|y - x\|^2.$$

Si on prend : $y = \bar{x}$ et $x = x^{(n)} \in \beta(\bar{x}, a)$, on obtient alors :

$$\|g(\bar{x}) - g(x^{(n)}) - Dg(x^{(n)})(\bar{x} - x^{(n)})\| \leq a_2 \|\bar{x} - x^{(n)}\|^2.$$

On sait que $g(\bar{x}) = 0$, on trouve alors :

$$\|Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) - Dg(x^{(n)})(\bar{x} - x^{(n)})\| \leq a_2 \|\bar{x} - x^{(n)}\|.$$

Par conséquence :

$$\|g(x^{(n)})(x^{(n+1)} - \bar{x})\| \leq a_2 \|\bar{x} - x^{(n)}\|^2. \quad (2.11)$$

On a :

$$x^{(n+1)} - \bar{x} = (Dg(x^{(n)}))^{-1} (Dg(x^{(n)}))(x^{(n+1)} - \bar{x}),$$

Ce qui implique que :

$$\|x^{(n+1)} - \bar{x}\| \leq \left\| (Dg(x^{(n)}))^{-1} \right\| \|Dg(x^{(n)})(x^{(n+1)} - \bar{x})\|.$$

En tenant compte 2.11, les hypothèses 1 et 2 et le fait que $x^{(n)} \in \beta(\bar{x}, r)$, ce qui nous permet de conclure que :

$$\|x^{(n+1)} - \bar{x}\| \leq a_1 a_2 \|x^{(n)} - \bar{x}\|^2 < a_1 a_2 r^2. \quad (2.12)$$

On a alors : $a_1 a_2 r^2 < r$; puisque $r \leq \frac{1}{a_1 a_2}$, donc $x^{(n+1)} \in \beta(\bar{x}, r)$. Par conséquence, on trouve vraiment que $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie dans $\beta(\bar{x}, r)$ pour tout $n \geq 0$.

Il reste à démontrer la convergence de la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vers \bar{x} . Au début, on considère l'inégalité 2.12 pour obtient :

$$a_1 a_2 \|x^{(n+1)} - \bar{x}\| \leq (a_1 a_2)^2 \|\bar{x} - x^{(n)}\|^2 = (a_1 a_2 \|x^{(n)} - \bar{x}\|)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence finie, on trouve :

$$a_1 a_2 \|x^{(n)} - \bar{x}\| \leq (a_1 a_2 \|x^{(0)} - \bar{x}\|)^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a précédemment $x^{(0)} \in \beta(\bar{x}, b)$ et $r \leq \frac{1}{a_1 a_2}$, il est facile de vérifier que :

$$a_1 a_2 \|x^{(0)} - \bar{x}\| < 1,$$

alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^{(n)} - \bar{x}\| = 0$. La convergence est au moins quadratique car l'inégalité 2.12 est de la forme :

$$\|x^{(n+1)} - \bar{x}\| \leq \beta \|x^{(n)} - \bar{x}\|^2 \quad \text{avec } \beta = a_1 a_2. \quad \blacklozenge$$

L'avantage de la méthode de Newton par rapport à une méthode de point fixe est que sa vitesse de convergence est d'ordre 2 mais d'un autre côté, elle ne converge pas si $x^{(0)}$ n'a pas été choisi "*suffisamment proche*" de \bar{x} , alors cette méthode diverge très vite.

Elle demande l'évaluation de la matrice Jacobienne à chaque itération ; en plus dans chaque étape, elle demande la résolution d'un système linéaire associé à la matrice Jacobienne qui peut être singulière ou mal-conditionnée.

2.3 Méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton dans le cas unidimensionnel, c'est-à-dire : $n = 1$ et $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La méthode de Newton pour calculer $\bar{x} \in \mathbb{R}$, tel que : $g(\bar{x}) = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R} \\ g'(x^{(n)}) (x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}) . \end{cases}$$

Pour éviter le calcul de $g'(x^{(n)})$ dans chaque itération, en la remplaçant par la dérivée approchée, alors on obtient la méthode de la sécante :

$$\begin{cases} x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R} \\ \frac{g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} (x^{(n+1)} - x^{(n)}) = -g(x^{(n)}) \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Il est clair que dans la méthode de la sécante, $x^{(n+1)}$ dépend de $x^{(n)}$ et de $x^{(n-1)}$; on a alors une méthode à deux pas, donc on a besoin de deux valeurs initiales $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$. L'avantage

de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul de g' mais l'inconvénient est qu'on perd la convergence quadratique.

Méthode de type Quasi-Newton

On veut généraliser la méthode de la sécante dans le cas où $n > 1$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Pour éviter le calcul de la matrice Jacobienne dans la méthode de Newton 2.6 on va remplacer $Dg(x^{(n)})$ par $B^{(n)} \in M_n(\mathbb{R})$ "proche de $Dg(x^{(n)})$. Donc, on cherche une matrice $B^{(n)}$ qui vérifie la condition suivante :

$$B^{(n)}(x^{(n)} - x^{(n-1)}) = g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)}).$$

Dans le cas où $n = 1$, cette condition détermine entièrement $B^{(n)}$:

$$B^{(n)} = \frac{g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}}.$$

Si $n > 1$ ceci ne permet pas de déterminer complètement $B^{(n)}$.

Méthode de broyden

Dans ce cas, on approche la matrice Jacobienne avec des matrices de rang un. Si $B^{(n-1)}$ est une approximation de la matrice Jacobienne à l'itération $(n-1)$ et on calcule l'approximation à l'itération (n) par la formule suivante :

$$B^{(n)} = B^{(n-1)} + \frac{(y^{(n)} - B^{(n-1)}\theta^{(n)})}{\theta^{(n)}\theta^{(n)}} (\theta^{(n)})^t,$$

où $y^{(n)} = g(x^{(n)}) - g(x^{(n-1)})$ et $\theta^{(n)} = x^{(n)} - x^{(n-1)}$ est la résolution de $B^{(n-1)}\theta^{(n)} = y^{(n)}$.

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, on veut présenter une application sur l'une des méthodes de résolution d'un système non linéaire qu'on a exposé précédemment. Cette application se fait au domaine d'électronique.

3.1 Commande de l'onduleur de tension monophasé

La topologie de l'onduleur à 3 niveaux est donnée par la figure 1 :

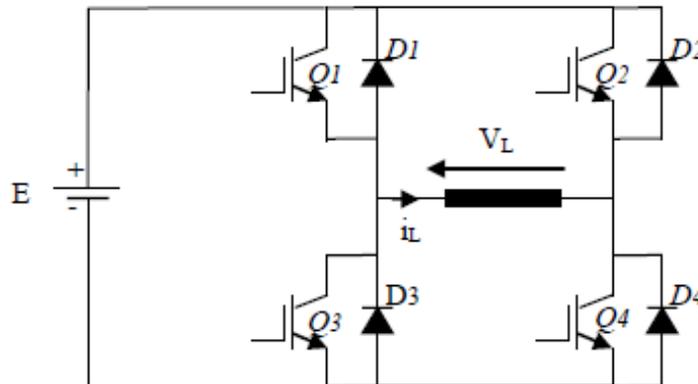


FIG. 3.1 – Onduleur monophasé d'élimination harmonique à trois niveaux

avec : Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 : la transistor et D_1, D_2, D_3, D_4 : la diode.

La figure 2 montre les formes d'ondes de la tension de sortie V_l , ainsi que les signaux du chaque interrupteur :

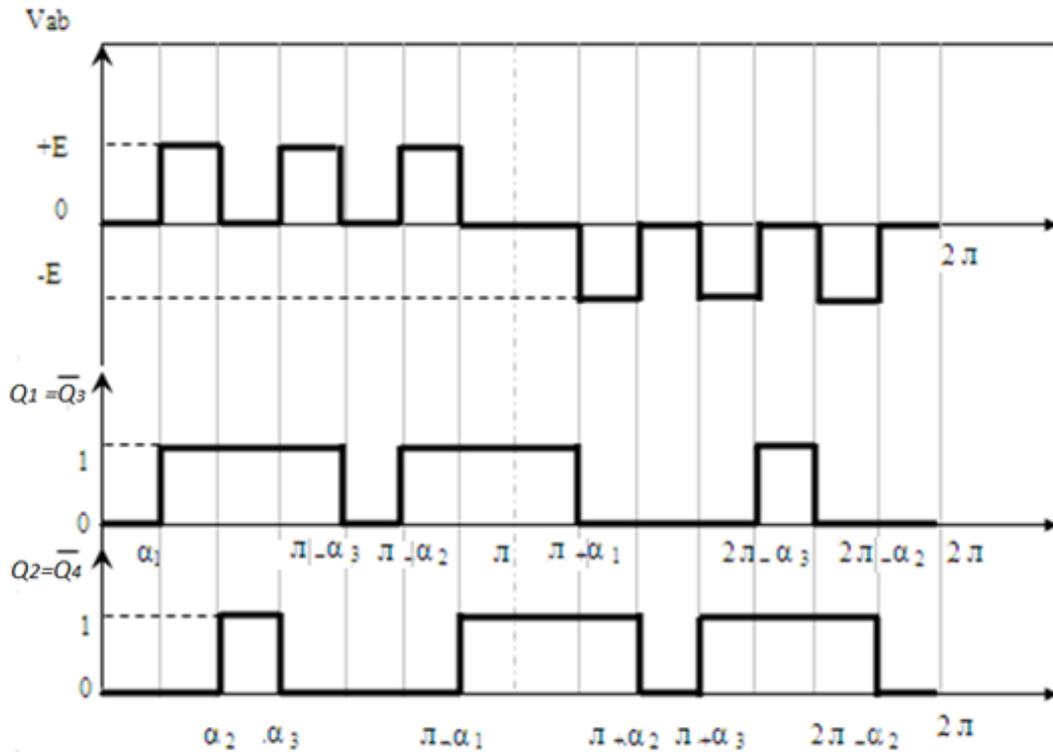


FIG. 3.2 – Signaux des interrupteurs d'un onduleur à trois niveaux

Elimination des harmoniques

L'idée de cette stratégie a été introduite pour la première fois par Trumbull en 1967, puis développée par Patel et Hoft en 1973. Son principe consiste d'abord à formuler l'expression générale de l'amplitude des harmoniques, en se basant sur le développement en série de Fourier.

L'expression obtenue est une fonction des angles : α_i de commutation; ensuite, un système d'équations non linéaires est obtenu, en imposant la valeur désirée du fondamental et en annulant certains harmoniques.

La résolution de ce système non linéaire permet de déterminer les angles α_i , par conséquent les instants de commande des interrupteurs. Les séries de Fourier sont des séries de

fonctions périodiques.

L'objectif est de décomposer un signal périodique en somme de sinus et de cosinus. Ceci peut être exprimé d'une manière mathématique par la relation suivante :

$$V_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)).$$

Les paramètres a_0 , a_n et b_n appelés : coefficients de Fourier et f_0 est la fréquence du fondamental. Pour une fonction périodique les coefficients a_0 , a_n et b_n sont déterminés à partir des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt; \end{array} \right.$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \text{ et } a_n \text{ égale à } 0 \text{ pour tout } n, \\ b_n = 0 \text{ pour } n \text{ pair,} \\ b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_i(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \text{ pour } n \text{ impaire.} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

On peut faire la décomposition en série de Fourier sur le quart de période à cause de la symétrie par rapport à la demi-période.

Nous présentons l'application des séries de Fourier à la tension fournie par l'onduleur à trois niveaux. Donc, nous décomposons le signal de sortie d'un onduleur pour déterminer les équations exprimant des différentes harmoniques. Ces équations sont en fonction des angles de commutation de commande des interrupteurs (figure 3, $U = E$).

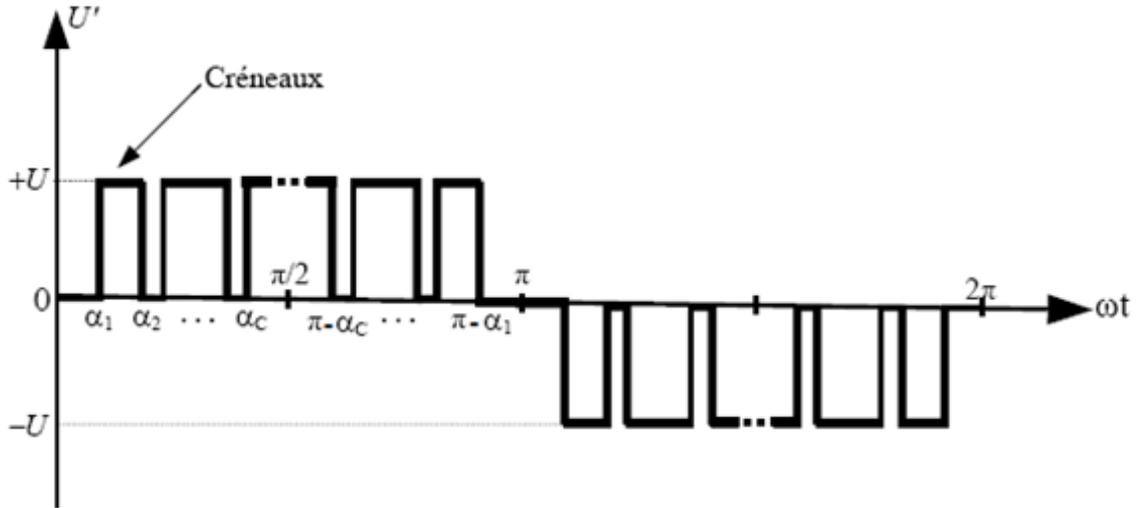


FIG. 3.3 – Motif adopté pour éliminer C-1 harmoniques

A partir de la figure 2 et l'équation 3.1, on peut écrire :

$$\begin{cases} b_1 = \frac{4E}{\pi} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3), \\ b_2 = \frac{4E}{3\pi} (\cos 3\alpha_1 - \cos 3\alpha_2 + \cos 3\alpha_3), \\ b_5 = \frac{4E}{5\pi} (\cos 5\alpha_1 - \cos 5\alpha_2 + \cos 5\alpha_3). \end{cases}$$

La tension de sortie est écrite comme suit :

$$\begin{aligned} V_l &= \frac{4E}{\pi} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3) \sin wt \\ &+ \frac{4E}{3\pi} (\cos 3\alpha_1 - \cos 3\alpha_2 + \cos 3\alpha_3) \sin 3wt \\ &+ \frac{4E}{5\pi} (\cos 5\alpha_1 - \cos 5\alpha_2 + \cos 5\alpha_3) \sin 5wt \\ &+ \dots + \frac{4E}{(2n+1)\pi} (\cos (2n+1)\alpha_1 - \cos (2n+1)\alpha_2 + \cos (2n+1)\alpha_3) \sin (2n+1)wt \end{aligned}$$

avec $w = 2\pi n f_0$. On cherche à éliminer tous les signaux qui possèdent des harmoniques et on garde seulement le fondamental. Mais pour cet exemple, on peut écarter uniquement deux harmoniques d'ordre 3 et 5.

Si on fixe une amplitude désirée du fondamental V_1 ; et en annulant les amplitudes des harmoniques d'ordre 3 et 5, on obtient le système d'équations non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{4E}{\pi} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3) = V_1 \\ \frac{4E}{3\pi} (\cos 3\alpha_1 - \cos 3\alpha_2 + \cos 3\alpha_3) = 0 \\ \frac{4E}{5\pi} (\cos 5\alpha_1 - \cos 5\alpha_2 + \cos 5\alpha_3) = 0. \end{cases}$$

Plus simplement, on peut écrire :

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 = \frac{V_1\pi}{4E} \\ \cos 3\alpha_1 - \cos 3\alpha_2 + \cos 3\alpha_3 = 0 \\ \cos 5\alpha_1 - \cos 5\alpha_2 + \cos 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Dans le cas général, la figure 3, on écrit :

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 - \cos \alpha_4 + \dots \pm \cos \alpha_c = \frac{V_1\pi}{4E} \\ \cos 3\alpha_1 - \cos 3\alpha_2 + \cos 3\alpha_3 - \cos 3\alpha_4 + \dots \pm \cos 3\alpha_c = 0 \\ \cos 5\alpha_1 - \cos 5\alpha_2 + \cos 5\alpha_3 - \cos 5\alpha_4 + \dots \pm \cos 5\alpha_c = 0 \\ \vdots \\ \cos C\alpha_1 - \cos C\alpha_2 + \cos C\alpha_3 - \cos C\alpha_4 + \dots \pm \cos C\alpha_c = 0. \end{cases}$$

Cette solution permet d'éliminer tous les harmoniques mais ce n'est pas possible d'obtenir une solution optimale du système non linéaire ci-dessus. En plus, on va tomber à des limites de fabrication des transistors hyperfréquences. Cependant, la méthode de Newton-Raphson est habituellement la plus employée pour résoudre un tel système.

On pose $m = \frac{V_1\pi}{4E}$: taux de modulation $0 < m < 1$; dont la solution recherchée, les angles de conduction doivent obéir à la contrainte suivante : $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_c < \frac{\pi}{2}$.

3.2 Onduleur triphasé

La structure suivante représente un groupement de trois onduleurs monophasés pour alimenter une charge triphasée comme montré à la figure 4 :

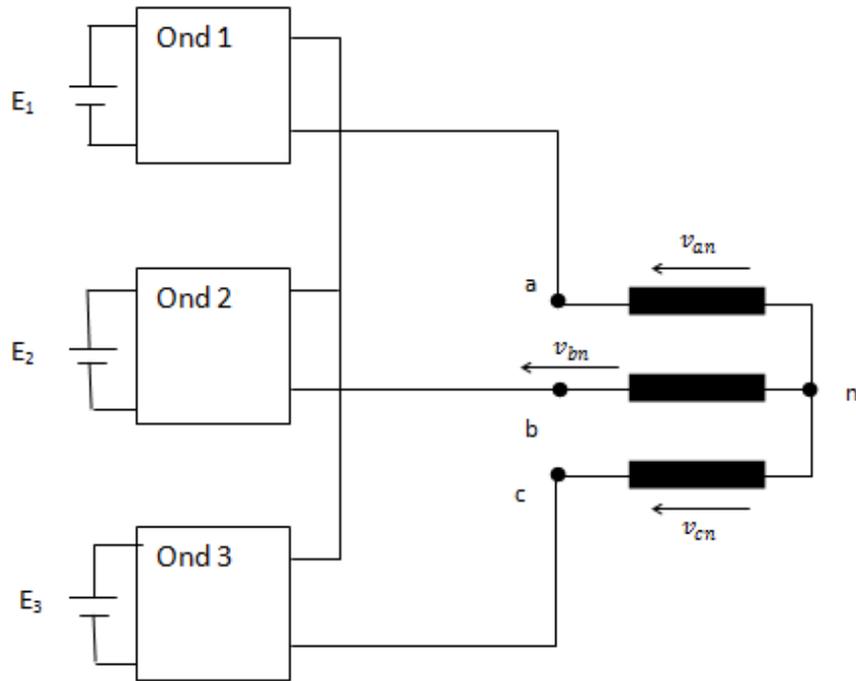


FIG. 3.4 – Onduleur triphasé à élimination d’harmoniques

Pour cette structure, les harmoniques de rang 3 ou multiple de 3 disparaissent. Donc, on ne cherche pas à éliminer ces harmoniques et on profite de suppression des conditions qui étaient liées à cette élimination pour annuler les harmoniques impaire 5 et 7.

Le système algébrique non linéaire comporte 3 équations à 3 inconnues ; les systèmes non linéaires peuvent être de fortes instabilités numériques, donc leur résolution est délicate. Dans le prochain paragraphe, nous présentons une méthode de résolution la plus connue dans la littérature. En considérant les trois onduleurs de la figure 4, on peut écrire :

$$a_0 \text{ et } a_n \text{ égale à } 0 \text{ pour tout } n,$$

en plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = 0 \quad \text{pour } n \text{ paire} \\ b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_l(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt \quad \text{pour } n \text{ impaire} \\ = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{a_1} 0 dt + \int_{a_1}^{a_2} E \sin(n\omega t) dt + \int_{a_2}^{a_s} 0 dt + \int_{a_s}^{\frac{\pi}{2}} E \sin(n\omega t) dt \right] \\ = \frac{4E}{n\pi} [-\cos(n\alpha_1) + \cos(n\alpha_2) + \cos(n\alpha_3)]. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{4E}{\pi} [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3)] = V_1 \\ b_5 = \frac{4E}{5\pi} [\cos(5\alpha_1) - \cos(5\alpha_2) + \cos(5\alpha_3)] = 0 \\ b_7 = \frac{4E}{7\pi} [\cos(7\alpha_1) - \cos(7\alpha_2) + \cos(7\alpha_3)] = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) = m \\ \cos(5\alpha_1) - \cos(5\alpha_2) + \cos(5\alpha_3) = 0 \\ \cos(7\alpha_1) - \cos(7\alpha_2) + \cos(7\alpha_3) = 0. \end{array} \right.$$

3.3 Méthode d'optimisation de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode utilisée pour résoudre une équation algébrique ou un système non linéaire, basée sur le procédé d'approximations successives.

Pour commander l'amplitude fondamentale et éliminer les harmoniques de rang 5 et 7, les trois équations non linéaires peuvent être données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_3) = m = \frac{\pi V_1}{4E} \\ \cos(5\alpha_1) - \cos(5\alpha_2) + \cos(5\alpha_3) = 0 \\ \cos(7\alpha_1) - \cos(7\alpha_2) + \cos(7\alpha_3) = 0 \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce système d'équations par la méthode de Newton-Raphson, on utilise :

1. Le vecteur des angles de commutation :

$$\alpha^{(n)} = \left[\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)} \right]^t$$

2. La matrice non linéaire associée au système :

$$g(\alpha^{(n)}) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1^{(n)}) - \cos(\alpha_2^{(n)}) + \cos(\alpha_3^{(n)}) \\ \cos(5\alpha_1^{(n)}) - \cos(5\alpha_2^{(n)}) + \cos(5\alpha_3^{(n)}) \\ \cos(7\alpha_1^{(n)}) - \cos(7\alpha_2^{(n)}) + \cos(7\alpha_3^{(n)}) \end{pmatrix}$$

et la matrice Jacobienne de g est :

$$J_g(\alpha^{(n)}) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha_1^{(n)}) & \sin(\alpha_2^{(n)}) & -\sin(\alpha_3^{(n)}) \\ -5\sin(\alpha_1^{(n)}) & 5\sin(\alpha_2^{(n)}) & -5\sin(\alpha_3^{(n)}) \\ -7\sin(\alpha_1^{(n)}) & 7\sin(\alpha_2^{(n)}) & -7\sin(\alpha_3^{(n)}) \end{pmatrix}$$

3. Le vecteur d'amplitude d'harmonique correspondant :

$$T = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$T = g(\alpha^{(n)})$$

L'algorithme de calcul des angles de commutation basé sur la méthode de Newton-Raphson, peut être résumé comme suit :

Répéter

i. On devine les valeurs initiales de $\alpha^{(n)}$ avec $n = 0$:

$$\alpha^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} & \alpha_2^{(0)} & \alpha_3^{(0)} \end{pmatrix}^t.$$

ii. Calcul de la valeur de $g(\alpha^{(0)}) = g^{(0)}$.

iii. $g^{(0)} + J_g(\alpha^{(0)}) d\alpha^{(0)} = T$ et $d\alpha^{(0)} = \begin{pmatrix} d\alpha_1^{(0)} & d\alpha_2^{(0)} & d\alpha_3^{(0)} \end{pmatrix}$.

iv. Résolution de l'équation $g(\alpha) = T$ par : $d\alpha^{(0)} = (J_g(\alpha^{(0)}))^{-1} (T - g^{(0)})$

v. mise à jour des valeurs initiales : $\alpha^{(n+1)} = \alpha^{(n)} + d\alpha^{(n)}$.

Jusqu'à la valeur désirée de $d\alpha^{(n)}$.

Les solutions doivent vérifier la condition suivante : $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$. Pour mettre en application cet algorithme dans un ordinateur, en se servant du code MATLAB, on obtient des résultats montrés par les figures suivantes :

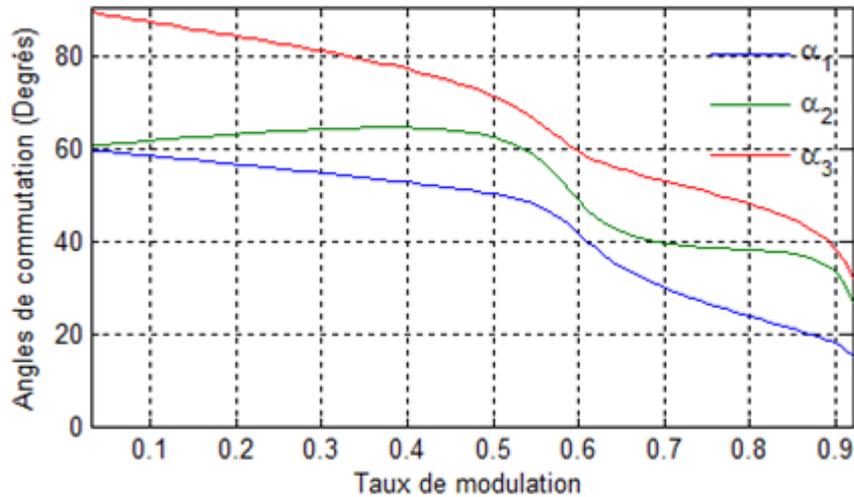


FIG. 3.5 – Variation des angles de commutation en fonction de taux de modulation m .

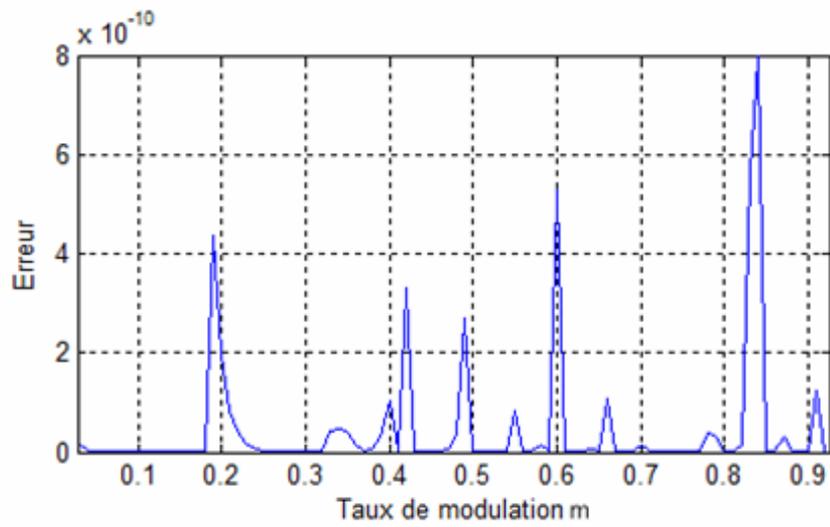


FIG. 3.6 – La variation de l’erreur de la méthode de Newton-Raphson en fonction du taux de modulation m

Conclusion

D'après l'étude qu'on a fait sur les trois méthodes de résolution des systèmes non linéaires (point fixe, Newton et la sécante), on peut dire que :

La méthode de point fixe a une importance théorique : son analyse mathématique est relativement simple et nous permet de déduire celle de la méthode de Newton.

La méthode de Newton est effectivement très rapide et elle est certainement à conseiller dans le cas où le calcul de la dérivée f' est facile et lorsque les valeurs initiales sont bien choisies dans le domaine de convergence.

Si on veut une méthode d'application plus universelle, la méthode de la sécante est plutôt à conseiller puisqu'elle nécessite seulement la connaissance de f . Elle est relativement rapide et ne nécessite qu'une évaluation de la fonction à chaque itération. Si en tenant compte ce dernier point, on peut considérer que cette méthode est plus rapide que la méthode de Newton

Bibliographie

- [1] **Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri.** *Méthodes numériques : algorithmes, analyse et applications* (2007).
- [2] **André Fortin.** *Analyse numérique pour ingénieurs* (1994).
- [3] **Eric Goncalvès.** *Méthodes, analyse et calculs numériques* (2005).
- [4] **Jacques Rappaz et Marco Picasso.** *Introduction à l'analyse numérique* (1998).
- [5] **Jean-Philippe grivet.** *Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur* (2009).
- [6] **Jean-Pierre Demailly.** *Analyse numérique et équations différentielles* (1991).
- [7] **Michel Pierre et Antoine Henrot.** *Analyse numérique* (2013).
- [8] **Michel Pinard.** *La commande électronique des machines* (2013).
- [9] **Raphaèle Herbin.** *Cours d'analyse numérique* (2006).