

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Filah Fatima Zohra

Titre :

**Systeme chaotique d'ordre fractionnaires de
Lorenz**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. MENACER Tidjani	UMKB	Encadreur
Dr. BERBICHE Mohamed	UMKB	Président
Dr. GUIDAD Derradji	UMKB	Examineur

Juin 2018

DÉDICACE

Je dédie ce travail à :

Merci mille fois et que “ Allah ” vont garde et protège.

Mes chers parents pour leurs amours, leurs patience et leur encouragement qui n’jamais cassé de me convenir Durant mes années d’études,

♡ *Ma chère grande mère ” khadija ”*♡.

♡ *Ma sœur ” Saadia, karima, Fatna ”*♡.

♡ *Mes frères ” Belkacem , Ahmed, Mhamed ”*♡.

♡ *Mes amis proches ” Sihem, Asma, Aicha, Sakina ”*♡.

♡ *Toute ma famille ” Filah et Zanouda ”*♡.

Tous mes collèguesde ma promotion 2018.

REMERCIEMENTS

*C'est avec l'aide de **DIEU** tout puissant que ce modeste travail a pu être réalisé,*

***DIEU** qui m'a donné fois, raison et lucidité.*

*Je tiens à remercier mon encadreur **Dr. MENACER Tidjani**, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce projet, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés durant mon projet.*

*Mon sincère remerciement aux membres de jury **Dr. BERBICHE Mohamed** et **Dr. GUIDAD Derradji** qui ont accepté de juger mon travail.*

Je remercie vivement tous les enseignants de notre département qui ont toujours donné le meilleur d'eux-même afin de nous assurer une formation de qualité.

Je n'oublie pas de remercier ma famille d'être avec nous dans tout les moments.

Enfin je m'exprime ma profonde reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce travail.

Merci

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
1 Systèmes dynamiques et chaos	5
1.1 Systèmes Dynamiques	5
1.1.1 Représentation mathématiques des systèmes dynamiques	5
1.1.2 Points d'équilibre	6
1.1.3 Attracteurs et bassins d'attraction	6
1.2 Notion de stabilité	8
1.2.1 Stabilité des Systèmes Linéaires	10
1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires par la méthode de Lyapunov . .	13
1.3 Bifurcations	16
1.3.1 Bifurcation noeud-col	17
1.3.2 Bifurcation fourche (Pitchfork)	18
1.3.3 Bifurcation transcritique	20
1.4 Théorie du Chaos	21
1.4.1 Définition du Chaos	21

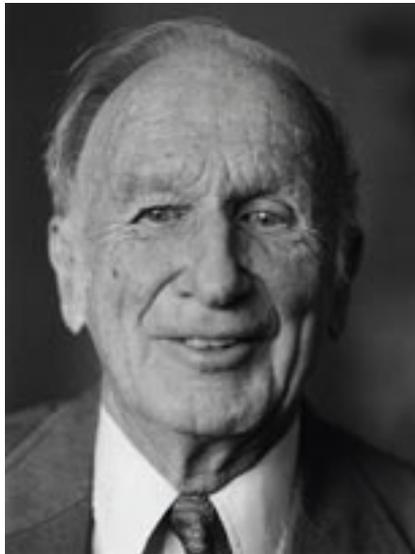
1.4.2	Caractéristique du Chaos	21
2	Les dérivées d'ordre fractionnaires	23
2.1	Outils de base	23
2.1.1	la fonction Gamma et Bêta	23
2.2	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	25
2.3	Dérivées fractionnaires de Caputo	35
2.4	Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo	38
2.5	Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire	39
3	Système de Lorenz	41
3.1	Introduction du système	41
3.2	Attracteur étrange de Lorenz	42
3.3	L'équilibre du modèle	42
3.4	Stabilité des points d'équilibres	44
3.5	Résultat numérique (voir la Annexe)	45
	Bibliographie	48
	Annexe A : Logiciel <i>Matlab</i>	49

Table des figures

1.1	Attracteurs réguliers	7
1.2	Attracteurs étranges	8
1.3	Diagramme de bifurcation noeud -col	18
1.4	Diagramme de bifurcation fourche super critique	19
1.5	Diagramme de bifurcation transcritique	20
1.6	Attracteur de Rossler	22
2.1	Région de stabilité d'un système linéaire d'ordre fractionnaire α	40
3.1	Point fixe pour $\alpha = 0.97$	46
3.2	Pour $\alpha = 0.98$	46
3.3	Attracteur étranger pour $\alpha = 1$	47

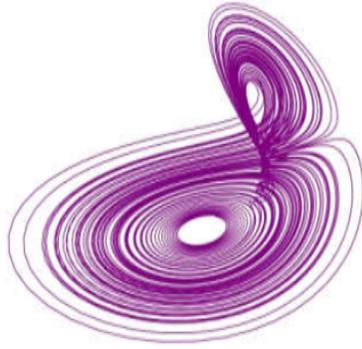
Introduction

Edward Lorenz, est nommé le père de la théorie du chaos et de l'effet papillon, professeur au MIT (Massachusetts institui of technologie), **Lorenz** a été le premier à reconnaître ce que l'on appelle aujourd'hui le comportement chaotique dans la modélisation mathématique des systèmes météorologiques.



Au début des années 1960, Lorenz s'est rendu compte que de petites différences dans un système dynamique tel que l'atmosphère - ou un modèle de l'atmosphère - pouvaient déclencher des résultats vastes et souvent insoupçonnés.

Ces observations l'ont finalement amené à formuler ce qui est devenu connu sous le nom d'effet papillon - un terme issu d'un article académique présenté en 1972 intitulé : « *Prédictibilité : le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas ?* »



Il y décrit le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. Selon la valeur de certains paramètres, un comportement dynamique nouveau était mis en évidence. Les trois variables d'état du système, permettant de déterminer l'évolution des masses d'air, manifestaient une activité erratique, imprévisible. Edward Lorenz mit en évidence que, dans les systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à long terme des systèmes totalement différents. Pour mieux faire comprendre l'importance de cette sensibilité aux conditions initiales, il eut recours à une image qui contribua au succès médiatique de la théorie du chaos : celle de l'effet papillon. Cette métaphore insistait sur la disproportion entre la cause et l'effet soulignant au passage l'imprédictibilité à long terme de l'évolution de tels systèmes.

Un autre sujet mathématique recoupé récemment avec les systèmes dynamiques est la dérivation fractionnaire qui est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction f . Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$.

C'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt.

L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première

conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974; et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968.

Ce mémoire a pour objet l'étude du système dynamique chaotiques à dérivées d'ordre fractionnaire de **Lorenz**. Il se compose de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous introduisons la théorie des systèmes dynamiques chaotiques, en commençant par la présentation mathématique des systèmes dynamiques, les points d'équilibre, notion de stabilité, en passant par la théorie de bifurcation et finissant par la théorie du chaos.

Au deuxième chapitre, nous allons aborder la dérivation fractionnaire en présentant la dérivée de Riemman Liouville, et la dérivée de Caputo et la comparaison entre eux.

Le troisième chapitre, est consacré à une application sur les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire où nous avons choisi un exemple fondamental de ces systèmes, qui est le modèle de **Lorenz** tel que nous avons fait une étude théorique et numérique sur ce système (attracteur étrange, points d'équilibre et leurs stabilités).

Chapitre 1

Systèmes dynamiques et chaos

Dans ce chapitre, après un rappel sur les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires et leurs propriétés générales, nous présentons des différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique.

1.1 Systèmes Dynamiques

En mathématique et en physique, un système dynamique est un système "**classique**" qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- Causale (c.à.d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou du présent).
- Déterministe (c.à.d qui à une "**condition initiale**" donnée à l'instant présent correspondante à chaque instant ultérieur "**un et un seul état futur**" possible).

1.1.1 Représentation mathématiques des systèmes dynamiques

Un système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables : **dynamiques** et **statiques**. Les variables dynamiques sont les quantités fondamentales qui changent avec le temps, les variables statiques, encore appelés paramètres du système, sont fixes.

Dans le cas où la composante "temps" est **continue**, le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielle sous la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t, \lambda) \quad (1.1)$$

Ou sous la forme généralisée :

$$\frac{d^\alpha X}{d^\alpha t} = F(X, t, \lambda), \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

$X \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\lambda \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ le vecteur des paramètres, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé champ de vecteur sur Ω . Dans le cas où le temps est **discret**, le système dynamique est présenté par une application itérative.

$$X_{k+1} = F(X_k, \lambda), k \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Lorsque F dépend explicitement du temps (1.1) est dit **non autonome**. Dans le cas contraire on dit que (1.1) est **autonome**.

1.1.2 Points d'équilibre

Un point d'équilibre (ou stationnaire, ou fixe) de l'équation $\dot{x} = F(x)$ est un point de l'espace de phases a tel que :

$$F(a) = 0. \quad (1.3)$$

1.1.3 Attracteurs et bassins d'attraction

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases, c'est-à-dire, une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Le bassin d'attraction

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur.

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques :

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes.

1. **Le point fixe** : est un point de l'espace des phases vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
2. **Un cycle limite** : est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
3. **Un tore** : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

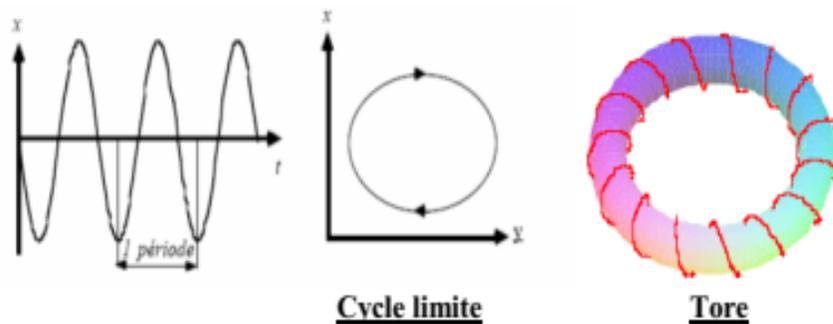


FIG. 1.1 – Attracteurs réguliers

Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. La sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension d de l'attracteur est fractale.

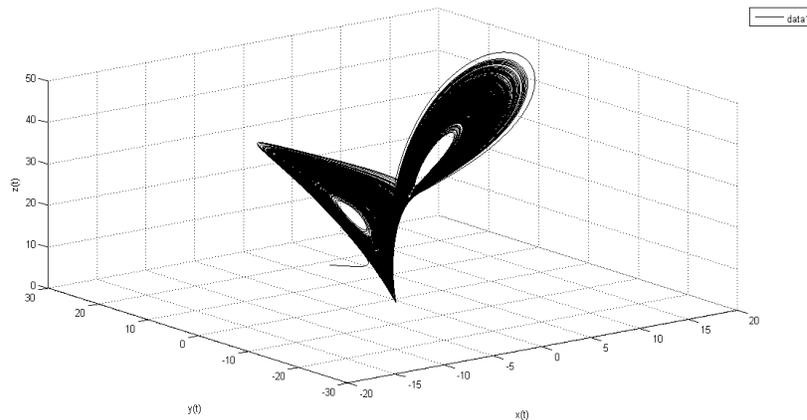


FIG. 1.2 – Attracteurs étranges

1.2 Notion de stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique. Traite de la stabilité des équilibres. Plus précisément, on s'intéresse au comportement des trajectoires du système au voisinage des équilibres.

Soit, un système dynamique non linéaire décrit par son modèle d'état :

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t)). \quad (1.4)$$

dont la réponse est telle que :

$$x(t) = x(t, t_0, x(t_0)).$$

et les condition initiales définies par :

$$x(0) = x_0.$$

Soit a un point d'équilibre du système, on a :

$$F(a) = 0$$

Définitions

Définition 1.2.1 *Le système est dit **stable** au sens de **Lyapunov** par rapport au point d'équilibre a si pour des conditions initiales $x(t_0)$ suffisamment proches du point d'équilibre soit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - a\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - a\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.5)$$

Définition 1.2.2 *Le point d'équilibre a est **asymptotiquement stable** si :*

$$\forall \delta > 0 : \|x(t_0) - a\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0)) - a\| = 0.$$

Définition 1.2.3 *Le point d'équilibre a est **exponentiellement stable** si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, a, b > 0 : \|x(t_0) - a\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - a\| < a \|x(t_0) - a\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.2.4 *Le point d'équilibre a est instable si l'équation (1.5) n'est pas satisfaite.*

Remarque 1.2.1 *Si le bassin d'attraction est l'espace \mathbb{R}^n tout entier, le point d'équilibre a est dit **globalement asymptotiquement stable**.*

1.2.1 Stabilité des Systèmes Linéaires

Considérons le système linéaire autonome suivant [3] :

$$\dot{X} = AX(t), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (1.6)$$

Un tel système ne possède qu'un seul point d'équilibre (Ceci n'est vraie que si $\det(A) \neq 0$, dans le cas où $\det(A) = 0$ il existe une infinité des points vérifiant $AX = 0$). D'après la définition précédente l'origine est un point d'équilibre **globalement asymptotiquement stable** si la trajectoire $X(t)$ solution de l'équation (1.6) est telle que :

$$\forall X(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0. \quad (1.7)$$

Recherchons une solution de l'équation (1.6) sous la forme du développement en série suivant :

$$X(t) = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + \dots \quad (1.8)$$

En calculant les dérivées successives de $X(t)$ pour $t = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} X(0) &= F_0, \\ \dot{X}(0) &= F_1 = AX(0), \\ \ddot{X}(0) &= 2F_2 = A\dot{X}(0) = A^2X(0) \rightarrow F_2 = \frac{A^2}{2}X(0), \\ \dddot{X}(0) &= 3!F_3 = A\ddot{X}(0) = A^3X(0) \rightarrow F_3 = \frac{A^3}{3!}X(0), \\ &\vdots \\ X^k(0) &= K!F_k = AX^{(k-1)}(0) = A^kX(0) \rightarrow F_k = \frac{A^k}{K!}X(0). \end{aligned}$$

En reportant dans le développement de $X(t)$ dans, (1.8) il vient :

$$X(t) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{k!} (At)^k X(0),$$

Or le développement en série $\sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ est de la même forme que celui de la fonction exponentielle scalaire e^{At} . On peut alors définir l'exponentielle e^{At} par le développement en série :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{k=+\infty} \frac{1}{k!} (At)^k,$$

la solution de l'équation (1.6) s'écrit donc :

$$X(t) = e^{At} X(0).$$

Afin d'établir à quelle condition la relation (1.7) est vérifiée, il est nécessaire de calculer l'exponentielle matricielle e^{At} , appelée aussi matrice de transition. On présente une méthode permettant le calcul de cette matrice.

Méthode de diagonalisation :

Dans le cas où les valeurs propres de la matrice A sont distinctes, on peut réaliser un changement de base permettant d'obtenir une matrice d'évolution diagonale. Si la matrice de passage T est constituée des vecteurs propres de A , on obtient dans la nouvelle base une matrice d'évolution $A_d = T^{-1}AT$ diagonale :

$$A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \rightarrow e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

avec λ_i pour $i = 1 \dots n$ les valeurs propres de A . On a $A = T A_d T^{-1}$, en reportant dans le développement en série de e^{At} il vient :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} (T A_d T^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = T \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A_d^k \frac{t^k}{k!} \right) T^{-1}$$

On a donc finalement :

$$e^{At} = T e^{A_d t} T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1},$$

avec $T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ où le v_i sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i de la matrice d'évolution A . Alors si les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative on a, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At} = 0$. En conséquence la condition de stabilité dans (1.7) est vérifiée.

Exemple 1.2.1 Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$

Les vecteurs propres sont : $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, la matrice de passage s'écrit donc :

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d'où } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient alors la matrice de transition :

$$e^{At} = T e^{A_d t} T^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-t} - 3e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Alors on a, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{At} = 0$ et la condition de stabilité dans (1.7) est vérifiée (les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative) alors point d'équilibre $a = 0$ asymptotiquement stable.

1.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires par la méthode de Lyapunov

Méthode directe

L'application de la définition donnée au paragraphe (1.2.1), nécessite le calcul des trajectoires solutions du système différentiel non linéaire [3] :

$$\dot{X} = f(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(a) = 0. \quad (1.9)$$

ce qui est en général impossible sauf dans les cas les plus simples. Il paraît donc nécessaire de pouvoir étudier la stabilité d'un point d'équilibre sans avoir à résoudre explicitement le système (1.9).

Ceci est rendu possible grâce aux résultats de Lyapunov, connus sous le nom de **méthode directe de Lyapunov**. La méthode de Lyapunov s'apparente à la recherche d'une fonction de distance, notée $V(x)$. Si $V(x)$ est une fonction décroissante du temps de classe C^1 définie dans un voisinage U de a avec $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de Lyapunov large pour (1.9) en a si :

- $V(x) > 0$, pour $x \neq a$ dans U .
- $V(a) = 0$.
- $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} V(x) \leq 0, \forall x \in U$.

Les théorèmes de **Lyapunov** s'énoncent alors comme suit :

Théorème 1.2.1 *Si le système (1.9) admet une fonction de Lyapunov large (respectivement stricte) en a , alors a est un point d'équilibre **stable** (resp asymptotiquement stable).*

Théorème 1.2.2 Si (1.9) admet en a une fonction de Lyapunov stricte $V(x)$, définie sur \mathbb{R}^n ($\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}, \dot{V}(x) < 0$) et propre ($V(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$) alors a est un point d'équilibre **globalement asymptotiquement stable**.

Théorème 1.2.3 S'il existe une fonction $V(x)$ telle que $\dot{V}(x)$ sont définie positive et si dans un voisinage arbitrairement petit du point d'équilibre a , il existe un point où $V(x)$ est positive alors l'équilibre est **instable**.

Exemple 1.2.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -X_1 X_2^4, \\ \dot{X}_2 = -X_2^5. \end{cases}$$

Étudions la stabilité du point d'équilibre $a = [0 \ 0]^T$ à l'aide de la fonction de Lyapunov candidate $V(X) = X_1^4 + X_2^4$ on a :

$$\dot{V}(x) = 4\dot{X}_1 X_1^3 + 4\dot{X}_2 X_2^3,$$

$$\dot{V}(x) = 4(-X_1 X_2^4) X_1^3 + 4(-X_2^5) X_2^3,$$

$$\dot{V}(x) = -4X_1^4 X_2^4 - 4X_2^8 = -4X_2^4 (X_1^4 + X_2^4) = -4X_2^4 V(x) \leq 0.$$

La fonction $\dot{V}(x)$ est négative ou nulle ($\dot{V}(x)$ n'est pas strictement négative car $\dot{V}(x) = 0$ pour $X_1 \in \mathbb{R}$ et $X_2 = 0$), l'origine est donc un point d'équilibre stable.

Méthode indirecte (Linéarisation)

Par un changement de coordonnées, le point d'équilibre (1.9) se ramène à l'origine ($F(0) = 0$) et le développement de F en série de Taylor autour de $x = 0$ donne [3] :

$$F(x) = DF(0)x + \frac{1}{2!}D^2F(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3F(0)(x, x, x) + \dots$$

La méthode indirecte de **Lyapunov**, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre a , consiste à étudier le système linéaire :

$$\dot{X} = Ax \tag{1.10}$$

$$\left(\text{avec } A = DF(0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=0} \right) \text{ la matrice jacobienne de } F \text{ en } 0$$

qui s'appelle le linéarisé du système (1.9) au point d'équilibre 0. Si A possède n valeurs propres distinctes λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution de (1.10) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i, \quad v_i \text{ le vecteur propre associé à } \lambda_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

D'où les théorèmes suivants :

Théorème 1.2.4

- Si les valeurs propres de $DF(a)$ sont toutes à partie réelle strictement **négative**, alors a est un **équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapunov**.

Théorème 1.2.5

- Si les valeurs propres de $DF(a)$ sont toutes à partie réelle strictement **positive**, alors a n'est pas un **équilibre stable au sens de Lyapunov**.

Théorème 1.2.6

- Ne peut pas conclure si **l'équilibre est stable ou instable**, si la matrice $DF(a)$ admet au moins une valeur propre **nulle**.

Exemple 1.2.3 Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -y^3 + x, \\ y' = x^4 + 2y + xz, \\ z' = -x^2y + z. \end{cases}$$

L'origine 0 est un point fixe. Son linéarisé est :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $DF(0)$ sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, toutes positives, d'où l'équilibre 0 est instable.

1.3 Bifurcations

Soit le système dynamique non-linéaire suivant :

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{1.11}$$

d'où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.1 Une **bifurcation** est un **changement qualitatif** de la solution a du système (1.11) lorsqu'on modifie le **paramètre de contrôle** μ , c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité (de **stable à instable** ou l'inverse) et l'apparition de nouvelles solutions. De façon générale, toutes les déstabilisations d'un système se ramènent à trois types de bifurcations génériques (pendant il existe des cas particuliers rares) que nous allons présenter sur trois cas simples monodimensionnels :

1.3.1 Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation la plus simple, elle est souvent représentée par l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad (1.12)$$

Nous allons étudier cette équation selon le paramètre de contrôle μ :

- Si $\mu < 0$ l'équation $F(x, \mu) = 0$ n'admet pas de solution alors on n'est pas des points d'équilibre.
- Si $\mu > 0$ on a :

$$\mu - x^2 = 0,$$

$$x^2 = \mu \iff x = \pm\sqrt{\mu}.$$

Par conséquent (1.12) admet deux points d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x \quad \text{avec } x = +\sqrt{\mu} \quad \text{alors } \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2\sqrt{\mu} < 0. \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2x \quad \text{avec } x = -\sqrt{\mu} \quad \text{alors } \frac{df(x, \mu)}{dx} = +2\sqrt{\mu} > 0. \end{array} \right.$$

Par suite les points d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = +\sqrt{\mu} \text{ est stable.} \\ a = -\sqrt{\mu} \text{ est instable.} \end{array} \right.$$

- Si $\mu = 0$ il y a un seul point d'équilibre $a = 0$ est semi stable.

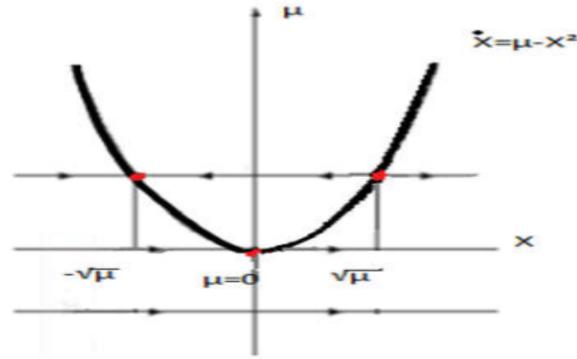


FIG. 1.3 – Diagramme de bifurcation noeud -col

1.3.2 Bifurcation fourche (Pitchfork)

L'équation générique d'une bifurcation fourche (**sur-critique**) est :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3.$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche (**sous-critique**) on a L'équation générique est :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x + x^3.$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche **sur-critique** on a :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \iff x(\mu - x^2) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu. \end{cases}$$

Si $\mu < 0$ on a un seul point d'équilibre $a = 0$.

$$\begin{cases} a = 0, \\ a = +\sqrt{\mu}, \\ a = -\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

Nous calculons la stabilité de ces points d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 3x^2 \quad \text{avec } x = 0 \quad \text{alors} \quad \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu. \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 3x^2 \quad \text{avec } x = \pm\sqrt{\mu} \quad \text{alors} \quad \frac{df(x, \mu)}{dx} = -2\mu. \end{array} \right.$$

- Si $\mu < 0$ le seul point d'équilibre $a = 0$ est stable.
- Si $\mu > 0$ le point d'équilibre $a = 0$ est instable, mais $a = \pm\sqrt{\mu}$ sont stables.

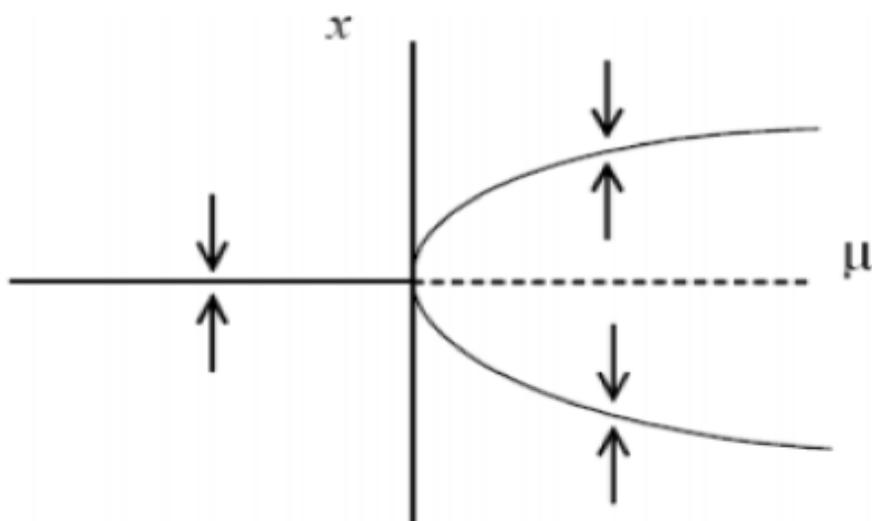


FIG. 1.4 – Diagramme de bifurcation fourche super critique

1.3.3 Bifurcation transcritique

Elle est caractérisée par un échange de stabilité entre des points fixes (les points stables deviennent instables, les points instables deviennent stables). L'équation générique d'une bifurcation transcritique est :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2.$$

On a alors :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^2 \iff x(\mu - x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0, \\ \text{ou} \\ x = \mu. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 2x \quad \text{avec} \quad x = 0 \quad \text{alors} \quad \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu. \\ \frac{df(x, \mu)}{dx} = \mu - 2x \quad \text{avec} \quad x = \mu \quad \text{alors} \quad \frac{df(x, \mu)}{dx} = -\mu. \end{cases}$$

Alors :

- Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $a = 0$ est stable, mais $a = \mu$ est instable.
- Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $a = 0$ est instable, mais $a = \mu$ est stable.

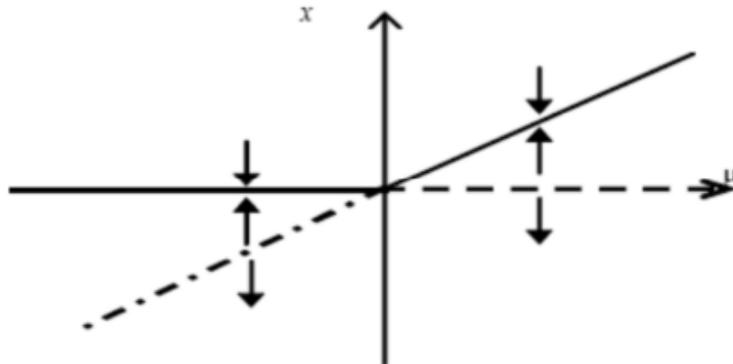


FIG. 1.5 – Diagramme de bifurcation transcritique

1.4 Théorie du Chaos

1.4.1 Définition du Chaos

Des systèmes dynamiques non linéaires, ou simplement linéaires par morceau, peuvent faire preuve de comportements complètement imprévisibles, qui peuvent même sembler aléatoires (alors qu'il s'agit de systèmes parfaitement déterministes). Cette imprédictibilité est appelée chaos. La branche des systèmes dynamiques qui s'attache à définir clairement et à étudier le chaos s'appelle la théorie du chaos.

Cette branche des mathématiques décrit qualitativement les comportements à long terme des systèmes dynamiques. Dans ce cadre, on ne met pas l'accent sur la recherche de solutions précises aux équations du système dynamique (ce qui, de toute façon, est souvent sans espoir), mais plutôt sur la réponse à des questions comme « Le système convergera-t-il vers un état stationnaire à long terme, et dans ce cas, quels sont les états stationnaires possibles? » ou « Le comportement à long terme du système dépend-il des conditions initiales? » [1]

1.4.2 Caractéristique du Chaos

1. **La non linéarité** : Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
2. **La déterminisme** : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
3. **La sensibilité aux conditions initiale** : De très changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique.
4. **L'imprévisible** : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

5. **L'irrégularité** : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables.
6. **Attracteur étrange** : Un attracteur est objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases, c'est-à-dire, une situation au un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses condition initiales. Dans un espace des phases à deux dimensions, les attracteurs sont soit des points, soit des cycle limites.

La figure [1.6] illustre l'attracteur chaotique du système de **Rosler** :

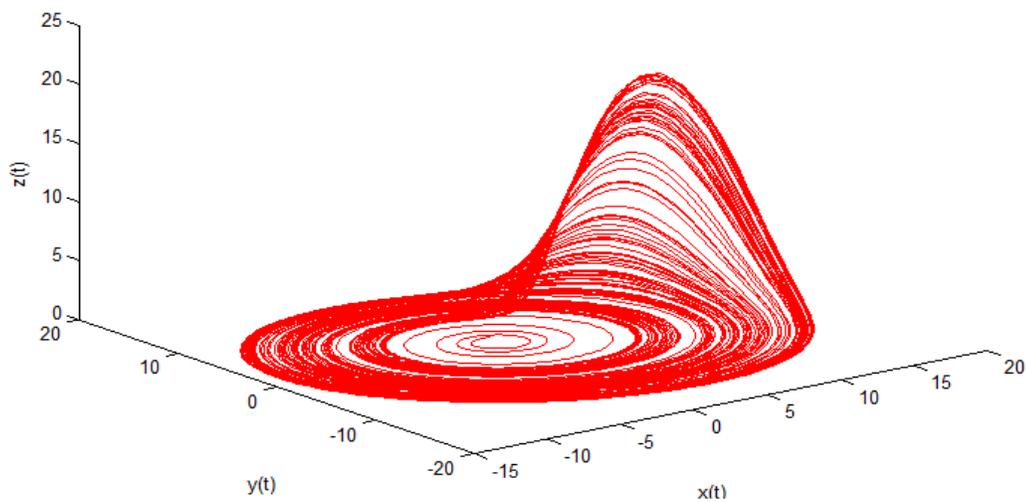


FIG. 1.6 – Attracteur de Rosler

Chapitre 2

Les dérivées d'ordre fractionnaires

Dans ce chapitre, nous donnons un rappel récapitulatif sur le calcul fractionnaire et la stabilité des systèmes fractionnaires.

2.1 Outils de base

2.1.1 la fonction Gamma et Bêta

Fonction Gamma

En mathématique, la fonction gamma est une fonction complexe, Elle prolonge la factorielle à l'ensemble des nombres complexes, pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(\alpha) > 0$, on définit $\Gamma(\alpha)$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Une propriété importante de $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

qu' on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = [-t^\alpha e^{-t}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \Gamma(\alpha).$$

Et en particulier :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n + 1) = n!$ (la fonction Gamma s'appelle aussi factorielle généralisée).

Exemple 2.1.1 $\Gamma(2) = 1! = 1$, $\Gamma(6) = 5! = 120$, $\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(3)} = \frac{4!}{2!} = 12$.

- *Evalueur*

(a) $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt$ et (b) $\int_0^{+\infty} t^7 e^{-4t} dt$

(a)

$$\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt = \Gamma(5) = 4! = 24.$$

(b) *posons $4t = y$ l'intégrale devient alors :*

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{4}\right)^7 e^{-y} \frac{dy}{4} = \frac{1}{4^8} \int_0^{+\infty} y^7 e^{-y} dy = \frac{1}{4^8} \Gamma(8) = \frac{7!}{4^8}.$$

Fonction Bêta

En mathématiques, la fonction **Bêta** est un type d'intégrale **d'Euler** définie pour tous nombres complexe p et q de parties réelle strictement positives par :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

Le changement de variable $u = 1 - t$ prouve que cette fonction est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Elle est liée à la fonction gamma par l'équation suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \forall p, q : \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0.$$

Exemple 2.1.2 - Evaluer

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^5 (1-t)^4 dt &= B(6, 5) \\ &= \frac{\Gamma(6)\Gamma(5)}{\Gamma(6+5)} = \frac{5!4!}{10!} = 7.93 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction réelle, a au domaine de définition de f et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Définition 2.2.1 On appelle *intégrale fractionnaire* de f d'ordre α et on la note $I_a^{(\alpha)}$, la fonction définie par [6] :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

Où $\Gamma(\alpha)$ la fonction **gamma d'Euler** définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t) dt.$$

On peut écrire $I_a^{(\alpha)}$ sous la forme suivante :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1} f(x-t) dt.$$

Exemple 2.2.1 pour $\alpha > 0$ non entier et $f(x) = x^\beta$, $\beta > -1$ alors :

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt,$$

posant $t = xu$ donc on a :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} (xu)^\beta x du, \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} (u)^\beta du \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 on a

$$I_0^{(\alpha)} x^{k-\alpha} = \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} x^k.$$

Définition 2.2.2 Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** d'ordre α d'une fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} f(x) &= D^n I_a^{(n-\alpha)} f(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a. \end{aligned}$$

avec n un entier naturel supérieur strictement à α , ou $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

Remarque 2.2.2 *En particulier, pour $\alpha = 0$, on a :*

$$D^0 f = f^0 = f \quad \text{et} \quad I^0 f = f_0 = f,$$

Alors

$$D_a^0 f(x) = DI_a^n f(x) = I_a^n f(x).$$

1. La dérivée fractionnaire $D_a^{(\alpha)}$ est indépendante de l'entier n et se réduit à la dérivée ordinaire pour α entier.
2. En générale, ces fonctions dépendent, de la constante a , qui'il sera commode de rappeler en indice. Lorsque elle sera fixée une fois pour toutes, nous utiliserons les notation plus simples f_α et $f^{(\alpha)}$ respectivement pour $I_a^{(\alpha)} f$ $D_a^{(\alpha)} f$.

Exemple 2.2.2 *Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :*

$$f(x) = \exp(2kx), k > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(2kx) &= D^{(n)} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(2kx), \\ &= \frac{d^n}{dx^n} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(2kx), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(2kx) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{n-\alpha-1} \exp(2k(x-t)) dt, \\ &= \frac{\exp(2kx)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{n-\alpha-1} \exp(-2kt) dt, \end{aligned}$$

$$\text{Posons } y = 2kt,$$

$$\text{Alors } dy = 2kdt,$$

Par suit

$$\begin{aligned} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(2kx) &= \frac{\exp(2kx)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{2k}\right)^{n-\alpha-1} \exp(-y) \frac{dy}{2k}, \\ &= \frac{\exp(2kx)}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_0^{+\infty} (y)^{n-\alpha-1} \exp(-y) dy \right) \frac{(2k)^{\alpha+1-n}}{2k}, \\ &= (2k)^{\alpha-n} \exp(2kx), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} D_{-\infty}^{\alpha} \exp(2kx) &= \frac{d^n}{dx^n} (2k)^{\alpha-n} \exp(2kx), \\ &= (2k)^{\alpha-n} (2k)^n \exp(2kx), \\ &= (2k)^{\alpha} \exp(2kx). \end{aligned}$$

C'est d'ailleurs cette dernière relation, extension de l'égalité suivante :

$$D^n \exp(2kx) = (2k)^n \exp(2kx).$$

avec n entier naturel.

- soit f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaire de **Riemann-Liouville**, pour

C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$, alors $D_a^{\alpha} (C_1f + C_2g)$ existe et on a :

$$D_a^{\alpha} (C_1f(x) + C_2g(x)) = C_1 D_a^{\alpha} f(x) + C_2 D_a^{\alpha} g(x).$$

Proposition 2.2.1 *Soient f une fonction intégrable et bornée, avec α et α' deux nombres réels strictement positifs. Alors on a [?] :*

$$I_a^{(\alpha')} [I_a^{(\alpha)} f(x)] = I_a^{(\alpha'+\alpha)} f(x). \quad (2.1)$$

Remarque 2.2.3 *On déduit alors de (2.1) que $I_a^{(\beta)} f(x)$ admet toutes les dérivées d'ordre entier inférieur à β , avec*

$$D_a^{(\alpha)} I_a^{(\beta)} f(x) = I_a^{(\beta-\alpha)} f(x), \quad (\alpha < \beta). \quad (2.2)$$

Ces dérivées sont continues.

La dérivée fractionnaire d'ordre α . La relation (2.2) montre que f ne dépend pas de l'entier n , et se réduit à la dérivée ordinaire lorsque α est entier.

Soit $\alpha \leq \beta$ on a :

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} I_a^{(\beta)} f(x) &= D_a^n I_a^{(n-\alpha)} I_a^{(\beta)} f(x), \\ &= D_a^n I_a^{(n-\alpha+\beta)} f(x) \end{aligned}$$

Comme

$$D_a^n I_a^n f = f$$

Alors, il résulte que

$$\begin{aligned} &= I_a^{(n-\alpha+\beta-n)} f(x), \\ &= I_a^{(\beta-\alpha)} f(x), \quad (\alpha \leq \beta). \end{aligned}$$

Ces dérivées sont continues.

Proposition 2.2.2 *Si la dérivée $D_a^{(\alpha)}$ existe en un point x_0 , il en est de même de $D_{a'}^{(\alpha)}$, quel que soit $a < x_0$, on a [5] :*

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D_{a'}^{(\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^{\dot{a}} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} f(x) &= D^n I_a^{(n-\alpha)} f(x), \\ &= D^n \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \right), \\ &= D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\dot{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt + D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\dot{a}}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \\ &= D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{\dot{a}}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt + D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\dot{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \\ &= D^n I_{\dot{a}}^{(n-\alpha)} f(x) + D^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^{\dot{a}} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \\ &= D_a^{(\alpha)} f(x) + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^{\dot{a}} (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.3

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, (\beta \geq 0).$$

Preuve. un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} I_a^{(\beta)}(1) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} dt, \\ &= \frac{1}{\beta\Gamma(\beta)} \left[-(x-t)^\beta \right]_a^x, \\ &= \frac{(x-a)^\beta}{\beta\Gamma(\beta)}, \end{aligned}$$

Comme

$$\beta\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta+1).$$

Alors il résulte que

$$I_a^{(\beta)}(1) = \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}, (\beta \geq 0).$$

■

Proposition 2.2.4

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} &= D^n I_a^{(n-\alpha)} I_a^{(\beta)} (1) = D^n I_a^{(\beta+n-\alpha)} 1, \\ D^n I_a^{(\beta+n-\alpha)} 1 &= D^n \frac{(x-a)^{\beta+n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}, \end{aligned}$$

Par suit

$$D_a^{(\alpha)} \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}. \quad (2.3)$$

■

Remarque 2.2.4 Si on pose $\beta = 0$ dans l'égalité (2.3), on obtient :

$$D_a^{(\alpha)} (1) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

On voit que la dérivée d'ordre non entier $D_a^{(\alpha)}$ est en général infinie pour $x = a$.

Proposition 2.2.5 Soit γ un entier naturel, et supposons que $f^{(r)}$ est intégrable.

Alors [5] :

$$D_a^{(\alpha')} f(x) = I_a^{(r-\alpha')} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^{i-\alpha'}}{\Gamma(i+1-\alpha')} f^{(i)}(a).$$

Donc

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha')} f(x) &= D_a^{(\alpha')} I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + D_a^{(\alpha')} \left(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{\Gamma(i+1)} f^{(i)}(a) \right), \\ &= D_a^{(\alpha')} I_a^{(\alpha')} I_a^{(-\alpha')} I_a^{(r)} f^{(r)}(x) + D_a^{(\alpha')} \left(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right), \end{aligned}$$

Alors

$$D_a^{(\alpha')} f(x) = I_a^{(r-\alpha')} f^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(x-a)^{i-\alpha'}}{\Gamma(i+1-\alpha')} f^{(i)}(a).$$

Proposition 2.2.6 $D_a^{(\alpha)} f$ est bornée dans (a', a) avec $a' > a$. Désignons par r la partie entière de α et on a :

$$I_a^{(r+1-\alpha)} f(x) = F(x),$$

Alors on a

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x).$$

Preuve. Supposons que $D_a^{(\alpha)} f$ est bornée dans (a', a) avec $a' > a$. on pose :

$$I_a^{(r+1-\alpha)} f(x) = F(x),$$

Alors

$$D_a^{(r+1)} I_a^{(r+1-\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x),$$

C'est-à-dire

$$D_a^{(r+1)} I_a^{(r+1)} I_a^{(-\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x),$$

Comme

$$\begin{aligned} D_a^{(r+1)} I_a^{(r+1)} f(x) &= I_a^{(r+1-r-1)} f(x), \\ &= I_a^{(0)} f(x) = f(x), \end{aligned}$$

Alors

$$I_a^{(-\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x),$$

Par suite

$$D_a^{(\alpha)} I_a^{(\alpha)} I_a^{(-\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x),$$

C'est-à-dire

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = F^{(r+1)}(x).$$

En conclusion, la dérivée de **Liouville** est donné par la relation :

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^{(r+1)} (I_a^{(r+1-\alpha)} f(x)), \text{ où } r = [\alpha].$$

■

Exemple 2.2.3 1. *La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann Liouville*

En générale la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de **Riemann Liouville** n'est pas nulle ni constante mais on a :

$$D_a^{(\alpha)} C = D^n I_a^{(n-\alpha)} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}.$$

2. *La dérivée de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Riemann-Liouville soit α non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$ alors on a :*

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n I_a^{(n-\alpha)} (x-a)^\beta,$$

On a :

$$\frac{d^n}{dx^n} I_a^{(n-\alpha)} (x-a)^\beta = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^\beta dt \right),$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x-a)$ on a :

$$\text{pour } t = a \rightarrow s = 0,$$

$$\text{pour } t = x \rightarrow s = 1,$$

$$\begin{aligned}
 D^n I_a^{(n-\alpha)} (x-a)^\beta &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n+\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^\beta ds, \right) \\
 &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{(x-a)^{n+\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} \right) \\
 &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (x-a)^{n+\beta-\alpha} \right), \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$:

$$D_0^{(\frac{1}{2})} (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

$f(x)$	$I_a^{(\alpha)} f(x)$	$D_a^\alpha f(x)$	Spécifications
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\beta+\alpha}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda x}$	$a = -\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$
$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda x}$	$a = +\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$

2.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 2.3.1 La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f est donnée par [7] :

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} f(x) &= I_a^{(n-\alpha)} f^n(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt, \\ &= I_a^{(n-\alpha)} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right). \end{aligned}$$

Théorème 2.3.1 Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$, si f possède $n - 1$ dérivée en a et si $D_a^{(\alpha)} f$ existe, alors [5] :

$$D_a^{(\alpha)} f(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right].$$

Pour presque tout $x \in [a, b]$.

Preuve. D'après la définition on a :

$$\begin{aligned} D_a^{(\alpha)} f(x) &= D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt, \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt, \\ &= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) (x-t)^{n-\alpha} \right]_{t=a}^{t=x} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} \left[Df(t) - D \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] dt, \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} & I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt, \\ & = I_a^{n-\alpha+1} D \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt. \end{aligned}$$

De la même façon pour n fois alors :

$$\begin{aligned} & I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt, \\ & = I_a^{n-\alpha+n} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt, \\ & = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dt. \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, alors :

$$\begin{aligned} & I_a^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \\ & = I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x), \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \\ & = D^n I_a^n I_a^{n-\alpha} D^n f(x), \\ & = I_a^{n-\alpha} D^n f(x), \\ & = D_a^\alpha f(x). \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. ■

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$D_a^\alpha C = I_a^{(n-\alpha)} C = 0.$$

2. La dérivée de $f(x) = (x-a)^\beta$ au sens de Caputo

Soit α non entier et $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ avec $\beta > n-1$ alors on a :

$$f^n(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}.$$

D'ou

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{(n-\alpha)} f^n(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} (t-a)^{\beta-n} dt, \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t = a + s(x-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

2.4 Comparaison entre la dérivée au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo

1. Nous avons vu que la dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** et celle de **Caputo** sont reliés par la formule :

$$(D_a^\alpha f)(x) = (D_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

2. Les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de **Caputo** qui représentent l'avantage principal de son approche. Elles acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, en autres mots, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.
3. Nous devons tout d'abord rappeler les formules des transformées de Laplace d'une dérivée d'ordre entier qui est représenté par la formule suivante :

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)](s) &= S^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-k-1} f^{(k)}(0), \\ &= S^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k f^{(n-k-1)}(0). \end{aligned}$$

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** pour $(n-1 \leq \alpha < n)$ et $a = 0$ est :

$$L[D_0^\alpha f(t)](s) = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^k \left[D_0^{(\alpha-k-1)} f(t) \right]_{t=0}.$$

tandis que pour celle de **Caputo** pour $(n-1 \leq \alpha < n)$ soit :

$$L[D_0^\alpha f(t)](s) = S^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Pour souligner la différence entre la forme des conditions initiales lesquelles doivent accompagner des équations différentielles en termes des dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo.

4. D'autre part, la dérivée d'une constante est **nulle** par Caputo contrairement a Riemann-Liouville, elle est :

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

5. **Riemann** commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier n , pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $(n-1 \leq \alpha < n)$.

Par contre Caputo commence par la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(x)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$.

2.5 Stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

Théorème 2.5.1 *Le système linéaire autonome d'ordre fractionnaire suivant [8] :*

$$\begin{cases} D^\alpha X(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad X \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < 1 \text{ et } A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

- Le système (2.4) est **asymptotiquement stable**, si et seulement si :

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ pour tout } i = 1, 2, \dots, n$$

pour tous λ , où λ sont toutes les valeurs propres de la matrice A . Aussi le vecteur d'état $X(t)$ tends vers 0 et vérifie la condition suivante :

$$\|x(t)\| < Nt^{-\alpha}, t > 0, \alpha > 0.$$

- Le système (2.4) est **stable**, si et seulement si, la condition $|\arg(\lambda_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$. est vérifiée pour toute λ valeur propre de la matrice A , et les valeurs propres critiques satisfaisant à $|\arg(\lambda_i)| = \alpha \frac{\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique.

Théorème 2.5.2 La figure (2.1) montre les régions **stables** et les régions **instables**. Considérant maintenant le système non linéaire d'ordre fractionnaire suivant :

$$D^\alpha X = F(X), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (2.5)$$

Le linéarisé de (2.5) autour du point d'équilibre a est donné par :

$$D^\alpha X \simeq Df(a)(X - a)$$

Alors l'équilibre a du système (2.5) est **localement asymptotiquement stable** si et seulement si toutes les valeurs propres λ de la matrice jacobienne $A = Df(a)$ satisfaisant

$$|\arg(\lambda)| > \alpha \frac{\pi}{2}$$

Remarque 2.5.1 Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont plus stables que les équations d'ordre entier [9].

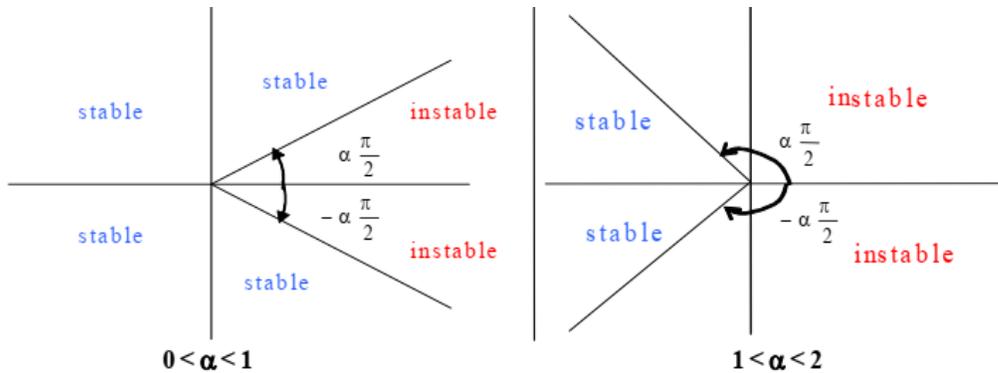


FIG. 2.1 – Région de stabilité d'un système linéaire d'ordre fractionnaire α

Chapitre 3

Système de Lorenz

3.1 Introduction du système

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de **Navier-Stockes** de la mécanique des fluides. En **1963**, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de **Rayleigh-Bénard**.

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et le célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées.

Les équations du modèle

Ce système de Lorenz s'écrit [1] :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{d^\beta y}{dt} = \rho x - y - xz \\ \frac{d^\gamma z}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

L'espace des phases est tridimensionnel, (x, y, z) le vecteur d'état et σ , ρ et b les paramètres du système. Les valeurs σ et b sont fixées. La paramètre de contrôle est ρ qui est positif.

3.2 Attracteur étrange de Lorenz

Le système chaotique (3.1) présente un superbe attracteur étrange en forme d'ailes de papillon, représenté sur *Fig* (3-3). La trajectoire commençant par s'enrouler sur une aile, puis sautant pour commencer à s'enrouler sur l'autre aile, et ainsi de suite.

On observe que la dynamique du système de **Lorenz** donné par le système (3.1) et indépendante du temps t , par conséquent ce type de système est qualifié d'être autonome.

3.3 L'équilibre du modèle

On cherche les points fixes $(x; y; z)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt} &= 0 \\ \frac{d^\beta y}{dt} &= 0 \\ \frac{d^\gamma z}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Un premier point fixe trivial est a_0 :

$$x = y = z = 0, \forall \rho \geq 0.$$

$$a_0 = (0, 0, 0).$$

deux autres points fixes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(y - x) = 0 \Leftrightarrow y = x \quad (1) \\ \rho x - y - xz = 0 \quad (2) \\ xy - bz = 0 \Leftrightarrow z = \frac{xy}{b} \quad (3) \end{array} \right.$$

(1) dans (2) donne :

$$\rho - 1 - z = 0 \Leftrightarrow z = (\rho - 1).$$

(1) dans (3) donne :

$$x^2 - bz = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{bz}$$

on a $z = (\rho - 1)$ alors :

$$x = \pm\sqrt{b(\rho - 1)}$$

les points fixes a_1 et a_2 sont donc :

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\sqrt{b(\rho - 1)}, \sqrt{b(\rho - 1)}, \rho - 1 \right) \\ a_2 &= \left(-\sqrt{b(\rho - 1)}, -\sqrt{b(\rho - 1)}, \rho - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour $\rho = 1$, $a_0 = a_1 = a_2$ donc pour $\rho \in [0, 1]$, il y a qu'un seul point fixe a_0 et pour $\rho > 1$, il y a 3 points fixes a_0, a_1 et a_2 .

3.4 Stabilité des points d'équilibres

L'étude de la stabilité des points fixes repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobéenne A obtenu en linéarisant le système (3.1) autour d'un point fixe.

L'expression de la matrice Jacobéenne A du système (3.1) est :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

La stabilité au point a_0 .

Dans cette section il est considéré que $\alpha = \beta = \gamma$ et $0 < \alpha \leq 1$.

Au point $(0, 0, 0)$, les valeurs propres λ de la matrice Jacobéenne A :

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

sont solutions de l'équation suivante :

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda + b) (\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - \rho)) = 0$$

Quand un $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$ donc :

$$\left(\lambda + \frac{8}{3}\right) (\lambda^2 + 11\lambda - 270) = 0.$$

$$\lambda_1 \simeq -\frac{8}{3}, \quad \lambda_2 \simeq 11.83, \quad \lambda_3 \simeq -22.83$$

D'où le point fixe a_0 est instable.

La stabilité pour les deux autres points d'équilibres a_1 et a_2 .

La matrice jacobienne correspond à ces points s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\rho-1)} \\ \sqrt{b(\rho-1)} & \sqrt{b(\rho-1)} & -B \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la jacobéenne sont solutions de l'équation en λ :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^3 + (1 + b + \sigma)\lambda^2 + b(\sigma + \rho)\lambda + 2b\sigma(\rho - 1) = 0$$

Quand un $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $\rho = 28$ donc :

$$\lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \frac{304}{3}\lambda + 1440 = 0$$

$$\lambda_1 \simeq 9.3963 \times 10^{-2} - 10.194i, \quad \lambda_2 \simeq 9.3963 \times 10^{-2} + 10.194i, \quad \lambda_3 \simeq -13.855.$$

Pour calculer la valeur de α appliquer l'inégalité :

$$\tan\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{2}\right) > \left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right| \iff \alpha > \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\left| \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \right| \right) \quad (3.3)$$

3.5 Résultat numérique (voir la Annexe)

Selon l'inégalité (3.3), la valeur maximale de l'ordre fractionnaire α pour laquelle le système de **Lorenz** d'ordre fractionnaire pour $(\sigma, \rho, b) = \left(10, 28, \frac{8}{3}\right)$, donc $\alpha \approx 0.98$.

Pour la résolution numérique du système (3.1) nous avons écrit les programmes en **MATLAB**. avec les paramètres suivantes : $\sigma = 10$, $c = 1$, $b = \frac{8}{3}$ et $\rho = 28$.

La *Figure* [3.2] montre la transition avec le Chaos de système (3.1) pour $\alpha \approx 0.98$. Si $\alpha < 0.98$ les points fixes a_1 , a_2 et sont stables voir les résultats de simulation numérique *Figure* [3.1]. La *Figure* [3.3] attracteur étrange du système de **Lorenz**.

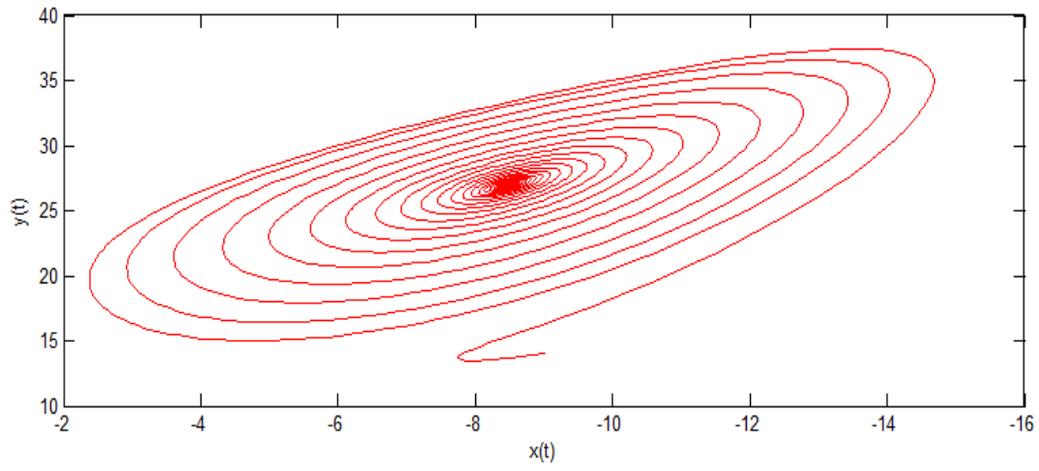


FIG. 3.1 – Point fixe pour $\alpha = 0.97$.

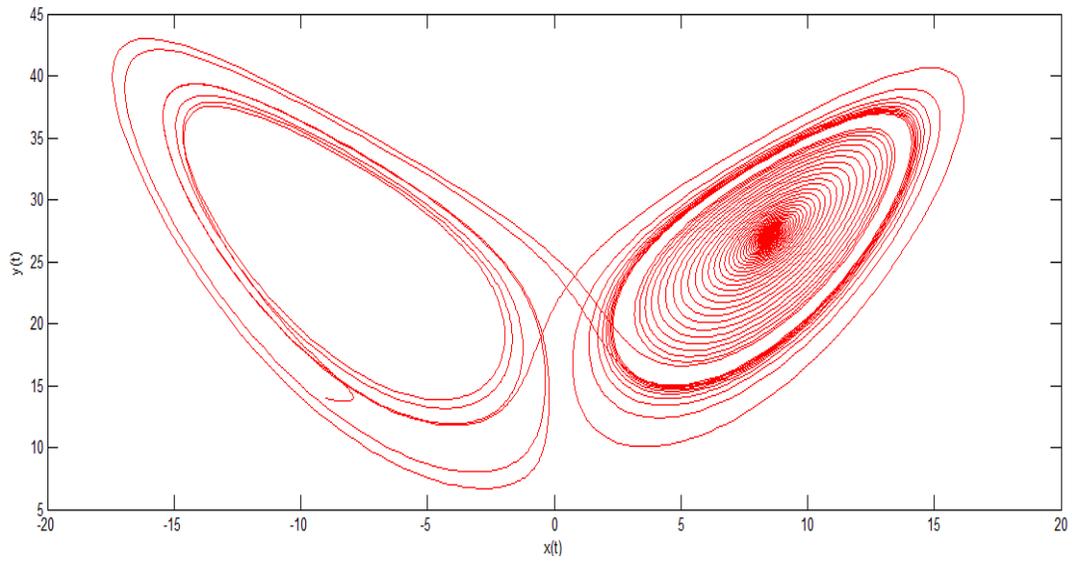


FIG. 3.2 – Pour $\alpha = 0.98$

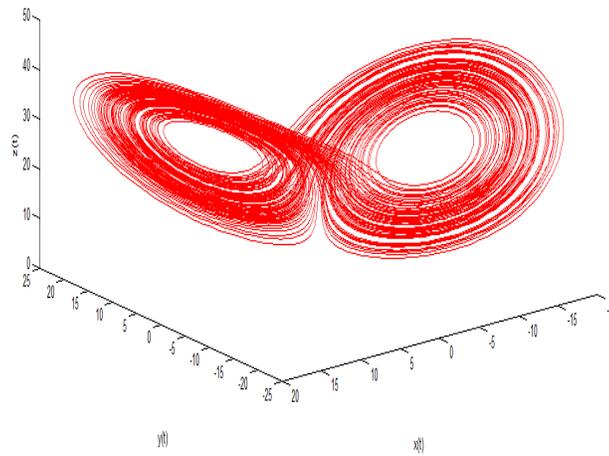


FIG. 3.3 – Attracteur étranger pour $\alpha = 1$.

Bibliographie

- [1] E. Goncalvès, “**Introduction aux systèmes dynamiques et chaos**”, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [2] Pires EJS, Machado, J.A.T, de Moura PB (2003) "**Fractional order dynamics in a GA planner**". Signal Processing 83 : 2377–2386.
- [3] Rosario Toscano. "**Commande et daigonstic des systèmes dynamiques**". Ellipses Édition Marketing S.A, 2005.
- [4] Jean-Louis Pac. "**Systèmes dynamiques**". Dunod paris, 2012.
- [5] Marchaud, M. A. (1927). "**Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles**". 1927.
- [6] Podlubny I (1999) "**Fractional Differential Equations**". Academic Press, New York.
- [7] Caputo M (1967) Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent–II, Geophys. J. R. Astron. Soc. 13 :529—539.
- [8] D. Matignon, **Stability result on fractional diferential equations** with applications to control processing, in : IMACS-SMC Proceedings, Lille, France, 1996, pp. 963—968.
- [9] Hyosung Ahn Yang Quan Chen , Igor Podlubny "**Robust stability cheking of a class of linear interval fractional order system using Lypunov inequality**" Proceedings of the end IFAC Porto, Portugal, July 19-21, 2006.

Annexe A : Programmes en *Matlab*

```
function [T, Y] =FOChen(parameters, orders, TSim, Y0)
%
% Numerical Solution of the Fractional-Order Chen's System
%
%  $D^{q1}x(t) = a(y(t) - x(t))$ 
%  $D^{q2}y(t) = dx(t) - x(t)z(t) + cy(t)$ 
%  $D^{q3}z(t) = x(t)y(t) - bz(t)$ 
%
% function [T, Y] = FOChen(parameters, orders, TSim, Y0)
%
% Input : parameters - model parameters [a, b, c, d]
% orders - derivatives orders [q1, q2, q3]
% TSim - simulation time (0–TSim) in sec
% Y0 - initial conditions [Y0(1), Y0(2), Y0(3)]
%
% Output : T - simulation time (0 : Tstep : TSim)
% Y - solution of the system ( $x = Y(1), y = Y(2), z = Y(3)$ )
%
% Author : (c) Ivo Petras (ivo.petras@tuke.sk), 2010.
%
```

```
% time step :
h = 0.005;
% number of calculated mesh points :
n=round(TSim/h);
%orders of derivatives, respectively :
q1 =orders(1); q2 =orders(2); q3 =orders(3);
% constants of Chen's system :
a=parameters(1); b=parameters(2);
c=parameters(3); d=parameters(4);
% binomial coefficients calculation :
cp1=1; cp2=1; cp3=1;
for j=1 :n
c1(j) = (1 - (1 + q1)/j) * cp1;
c2(j) = (1 - (1 + q2)/j) * cp2;
c3(j) = (1 - (1 + q3)/j) * cp3;
cp1 = c1(j); cp2 = c2(j); cp3 = c3(j);
end
% initial conditions setting :
x(1) = Y0(1); y(1) = Y0(2); z(1) = Y0(3);
% calculation of phase portraits /numerical solution/ :
for i = 2 : n
x(i) = (a * (y(i - 1) - x(i - 1))) * h^q1 - memo(x, c1, i);
y(i) = (b * x(i) - x(i) * z(i - 1) - c * y(i - 1)) * h^q2 - memo(y, c2, i);
z(i) = (x(i) * y(i) - d * z(i - 1)) * h^q3 - memo(z, c3, i);
end
for j = 1 : n
Y(j, 1) = x(j);
```

```
Y(j,2) = y(j);
```

```
Y(j,3) = z(j);
```

```
end
```

```
T=h :h :TSim;
```

```
%
```

Executive

```
[t,y]=FOChen([10 28 1 8/3], [0.98 0.98 0.98], 500, [-9 -5 14]);
```

```
figure
```

```
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'k');
```

```
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); zlabel('z(t)'); grid;
```

