الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Biskra

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique

Filière : Génie Mécanique

Option: Conception mécanique et productique

Réf:.....

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme de:

MASTER

Thème

Contribution à la pratique et la modélisation des structures composites par la méthode des éléments finis

Présenté par:

MGHEZZI LARAFI Mouadh

Proposé et dirigé par:

Dr. SEDIRA lakhdar

Devant le jury composé de :

Pr. AMRANE Mohamed Nadir — **Président**

Dr. MEFTAH Kamel — **Examinateur**

Promotion : Juin 2017

الحمد لله وحده

Remerciements

Je commence par remercier Dieu le tout puissant qui m'a donné santé, volonté, courage et patience pour pouvoir mener à bien ce travail, que son nom soit glorifié.

Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement exceptionnel de mon promoteur de stage: le Dr Lakhdar SEDIRA. je le remercie pour sa patience, pour tout le temps qu'il ma consacré, ses précieuses directives, et pour la qualité de son suivi, sa rigueur et sa disponibilité durant toute la période de mon préparation de ce mémoire.

Le présent mémoire n'aurait pas vu le jour sans l'aide bienveillante, la compréhension et le dévouement de certaines personnes qui, par leur présence et leurs conseils, nous ont soutenus. Nous voudrions remercier d'abord les membres de jury, Pour l'honneur qu'ils nous ont fait d'avoir acceptés de lire et d'examiner ce travail.

Je remercie le président de jury Pr. Mohamed Nadir AMRANE, d'avoir accepté d'examiner ce travail, je remercie aussi l'examinateur Dr kamel MEFTAH , je compte sur vous remarques sans doute enrichissantes.

Ainsi, nous voudrions remercier le chef de laboratoire de recherche Pr. Mabrouk HECINI. Je suis reconnaissant de m'avoir ouvert les portes de son imminent laboratoire. Pour m'avoir accueilli et de m'avoir donné les moyens d'effectuer ce travail. Enfin, nous n'oublions pas de remercier l'ensemble du personnel du laboratoire qui m'ont accueilli de la meilleure des façons et qui m'ont aidé à réaliser ce travail, je vous adresse mon sincère remerciement.

Dédicaces

Tout d'abord, louange à Allah qui m'a guidé sur le droit chemin tout au long du travail et m'a inspiré les bons pas et les justes reflexes. Sans sa miséricorde, ce travail n'aboutira pas.

Plus que jamais je dédie ce modeste travail à ma famille (Mghezzi) et j'aimerai qu'il soit le témoignage de leurs consécrations et leurs fois en moi.

Aux plus belles créatures que Dieu a créé sur terre, À ceux qui m'ont imprégné de l'essence de leurs être, de leurs générosité, et de leurs gentillesse et n'ont jamais cessé d'être là pour moi : c'est à vous mes chères parents que je dois ce travail. Je vous aime, que dieu vous garde et vous protège.

A ma 2éme mère et ma belle grande mère Masoudaa, rebbi yarhamha

A mon chère oncle Abd lkarim.

A mes frères Mosab et Badr, ma sœur Yousra et son mari Mehdi ,et leurs petit ange Yasser, Les mots ne suffit guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous, je vous ADORE. Je vous aime tous. Merci d'être présent et que Dieu vous garde auprès de moi.

A mes meilleures amies Djamale, Ayoub, Ahemad et Zaki avec qui j'ai partagé mes plus belles années d'études.

Mouadh. M

SOMMAIRE

Remerciements ……...…..I

Dédicace……..…… …… ..II

Sommaire

Liste des figures…….……III

Liste des tableaux……..... …….V

Notation……..……VI

Introduction générale ……..……1

CHAPITRE I : Formulation éléments finis tridimensionnels

I.1 Introduction ……..3

I.2 Généralité sur la méthode des éléments finis ……...…… ..……..3

I.2.1 Historique 1…….3

I.2.2. Introduction à la méthode des éléments finis …….…….....4

I.2.3 Définition de la MEF …….…….6

I.3 Formulation variationnelle …….....6

I.3.1 Intégration par partie …….……7

I.3.1.1 Formule de Green à trois dimensions ……..7

I.3.1.2 Forme intégrale faible du problème d'élasticité ..……...8

I.3.1.2 Forme Intégrale (Méthode de Galerkine) …….....9

I.4 Approximations géométriques et cinématiques ……..……...……..…10

I.5 Champs de déformations et de contraintes … …..…….…..14

I.5.1 Champs de déformations …… ….……....14

I.5.2 Champs de contraintes ……..……15

I.6 Matrice de rigidité et vecteur force élémentaires …….……...16

I.6.1 Formulations élémentaires …….…….……16

I.6.2. Calculs élémentaires…… …..…….……17

CHAPITRE II : Présentation générale du logiciel Catia V5

II.1.Introduction …….……...….19

II.2.Définition ……....19

II.3.Domaines d'application …….....19

II.4.Caractéristiques techniques ……20

II.5.Commande de base …….…….….…..21

II.5.1.Interface graphique ……..……21

II.5.2.Eléments actifs …….....23

II.5.3. Sélection des objets ……23

II.5.4.Fonctionnement des barres d'outils …….……24

II.5.6. Déplacement et zoom des éléments à l'écran …….....24

II.6.Apprentissage de quelques modules……..…….…….25

II.6.1.Sketcher et Part Design……...……..25

II.6.2. Création d'un contour…….……..25

II.6.3. Définition des contraintes ……..…….26

II.7. Eléments de référence ……..…….27

II.7.1.Utilisation des éléments de référence……...…….28

II.8. Création des volumes ……..……..….29

II.8.1.Composants d'habillage…….....…...29

II.9.Transformations …….....29

II.9.1.Application de transformations …….…..30

II.10.Opérations booléennes ……..…30

II.10.1.Utilisation des opérations booléennes ……31

II.10.2.Création de corps de pièce ……31

II.10.3.Création d'opérations booléennes …….……32

II.11.Gestions des éléments……...……32

II.11.1 Édition des propriétés ……..…….32

II.11.2.Divers outils ……..34

II.12.Avantages ……34

CHAPITRE III : Résultats et discussions

III.1.Introduction ……..…36

III.2 Matériaux composites à renfort unidirectionnel ……....36

III.2.1 Volume élémentaire représentatif réduit (une seule fibre) …….…….37

III.2.2 Volume élémentaire représentatif étendu (27 fibres) ……..……41

III. 3 Modélisation d'une plaque carrée sandwich sous chargement uniforme ……..43

III.3.1.Structures en sandwich ……..…43

III.3.2 Mode de travail détaillé ……44

III.3.3 Présentation des résultats ……..…….46

Annexe 1…….48

Conclusion générale……....55

Références……...……56

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I :

Figure I.1 Corps solide 3D ……7

Figure I.2 Normale à la surface ……7

Figure.I.3 Elément tétraédrique à 4 nœuds ……...11

Figure.I.4 Eléments hexaédrique à 8 nœuds ……11

CHAPITRE II :

Figure II.1. Champ d'application de CATIA : de la conception à la réalisation ……20

Figure II.2. Interface graphique de CATIA v5 ……21

Figure II.3.Définition de l'objet du travail ……...23

Figure II.4.la sélection des objets ……23

Figure. II.5. fonction sous menus ……24

Figure .II.6. Déplacement et zoom des éléments à l'écran ……...27

Figure.II.7. création d'un contour ……25

Figure II.8.barre d'état des coordonnées des points ……25

Figure II.9. Autres options de la barre d'état ……25

Figure II.10.opération sur profil ……...……26

Figure II.11. barre d'option relimitation ……...26

Figure II.12. suppression et intersection des éléments ……26

Figure II.13. les différentes contraintes ……..28

Figure II.14. symboles de sketcher …….28

Figure II.15. applications de transformation ……..30

Figure II.16. l'arbre de spécification ……..31

Figure II.17. création d'opérations booléennes …….32

Figure II.18. commande à différentes fonctions ……33

CHAPITRE III :

Figure III.1 Géométrie de résine……..……....28

Figure.III.2 Géométrie de fibre……..……..28

Figure.III.3 Le VER : conditions aux limites ……..….29

Figure.III.4.Représentation de la déformée de VER et déplacements longitudinaux …….40

Figure.III.5 représentation d'une demie-fibre……...……41

Figure III.6 Forme de la matrice creuse (27 inclusions)……..42

Figure.III.7 Représentation du déplacement de la structure ……..……...……..42

Figure.III.8 Une structure en sandwich et ses constituants……..…44

Figure.III.9.la forme sandwich ……...46

Figure.III.10.présentation des charges et des fixations ……..……46

Figure.III.11 Translation aux nœuds ……..47

Figure.III.12 Critère de Von Mises aux nœuds …….…….47

LISTE DES TABLEAU

CHAPITRE I :

Tableau. I.1 Historique des méthodes modernes d'analyse des structures jusqu'à 1956 …….5

Tableau I.2 Fonctions de formes de l'élément Hexaèdre à 8 nœuds ……...12

Tableau I. 3 Fonctions de formes de l'élément tétraédrique à 4 nœuds …….13

CHAPITRE II :

Tableau II.1. modules d'apprentissage de CATIA v5 …….22

Tableau II.2. contraintes géométriques ……27

Tableau II.3.contraintesdimensionnelles ……27

CHAPITRE III :

Tableau.III.1 Paramètres liés à la loi de Hooke, module de Young, cas d'une seule fibre ...29

Tableau.III.2. Modules de Young de la méthode analytique ……..……..…40

Tableau.III.3 Paramètres liés à la loi de Hooke, module de Young, cas d'une seule fibre…43

LISTE DES SYMBOLES

f_v : La force volumique

σ : Contraintes mécaniques.

$\vec{f_S}$: L'effort de surface

S_f : La surface

F_v : Les efforts de volume.

W : La forte d'un problème d'élasticité tridimensionnel

$\langle\Psi\rangle$: Le Champ de déplacement

$\vec{n}$: Le vecteur normal à la surface

N_i : Les nœuds

[L] : L'opérateur différentiel tridimensionnel

[B] : Matrice qui relie les déplacements aux déformations

j_{lk} : Les termes de la matrice Jacobienne

$[H]$: La matrice d'élasticité

λ : Coefficients de Lamé

G : Coefficients de Lamé

$\{F^e\}$: Le vecteur des forces nodales

$[K^e]$: La matrice de rigidité élémentaire

F : La force

ε : La déformation

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, le développement rapide des technologies modernes requiert que l'on utilise des matériaux ayant des caractéristiques spécifiques élevées (bons rapports rigidité-poids et résistance-poids, faible coût d'entretien, excellente durabilité et bien d'amples qualités). Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent à ces exigences. Ils deviennent de plus en plus incontournables dans de nombreuses composantes structurales comme la marine, le transport, la navigation, les sports, les applications aérospatiales et ils ont été utilisés récemment dans les structures de génie mécanique comme des compléments aux matériaux classiques.

Parmi les composites les plus convoités, on peut distinguer deux grandes catégories de matériaux composites structuraux: Les composite à fibre unidirectionnelle et les sandwichs. Les sandwichs sont des structures composites dont l'utilisation connaît un essor important. Ces structures se composent de trois couches principales dont les caractéristiques mécaniques sont différentes: deux peaux fines, généralement stratifiées, possédant de très bonnes caractéristiques mécaniques (module d'élasticité élevé ainsi qu'une grande résistance à la compression et à la traction), collées sur une âme épaisse, légère et de faibles caractéristiques mécaniques (acier, cuivre . aluminium … etc.) dont le rôle principal est de résister aux efforts de flexion. Ces différentes couches sont liées entre elles par collage ou par soudure.

La méthode des éléments finis s'est imposée dans les dernières années comme étant une méthode puissante et efficace, ce qui lui permet d'être largement utilisée dans l'analyse de comportement complexe, entre autres les structures composites sandwichs, qui sont pratiquement difficile à mettre en œuvre, d'où l'utilisation des outils informatiques puissants et divers programmes et des codes sont devenus indispensables .

Par conséquent, les ingénieurs doivent choisir entre les programme moins coûteux mais moins précis au niveau local et ceux raffinés et sophistiqués mais trop coûteux en terme de temps de calcul. Ces difficultés ont ramené les chercheurs à développer d'autres codes assurant un meilleur compromis entre la précision et le faible coût. Toutefois, ce domaine requiert des recherches importantes et plus approfondies sur les programmes qui sont capables d'analyser d'une manière plus précise le comportement de ces structures.

Le code CATIA v5, développé à partir du code CATIA v4, est l'un des programmes les plus utilisé dispose d'un module de calcul par éléments finis permettant de réaliser un routage rapide des pièces crées par CAO. Ce module s'avère être un atout non négligeable dans les phases de conception. Par l'utilisation rapide d'un calcul par éléments finis certaines faiblesses des structures peuvent être évitées par modification de leur design.

Notre étude est organisée en trois parties : Le premier chapitre est consacrée à la modélisation du comportement des structures solides par éléments finis tridimensionnels. Une formulation variationnelle des éléments volumiques a été détaillée. On débute par une description générale de la méthode, et on se termine par le système d'équations, tout en passant par la construction des matrices de rigidité et les vecteurs forces des éléments. L'objectif de chapitre est bien évidemment de se familiariser avec cette fameuse méthode qui sera utilisé dans le code de calcul Catia.

Le deuxième chapitre concerne les principes de base du code Catia v5. Une description de différentes interfaces graphiques de son menu est présentée avec les outils les plus utilisés dans la modélisation 3D de corps solides.

Le troisième chapitre consiste en deux applications sur les matériaux composites. (i) Il s'agit de faire la modélisation d'une couche en composite à renfort unidirectionnel. Dans le but de faire l'homogénéisation, le recours à la loi de mélange qui ne tient en compte que l'orientation des fibres peut fournir des propriétés mécaniques homogénéisées du matériau. Cependant, notre alternative consiste à faire la modalisation tridimensionnelle de la matrice et les fibres, tout en remplissant le paramètre de l'orientation des fibres, la quantité des fibres (fraction volumique) dans la couche en question est également considérée. Deux types de volumes élémentaires représentatifs ont été utilisés dans cette modélisation. (ii) L'analyse du comportement d'une structure sandwich en flexion est une application typique d'un matériau composite largement utilisé. Le travail vise à exploiter et maitriser tous les outils offerts par le code Catia, depuis la géométrie jusqu'à l'analyse, et qui peuvent servir à cet objectif.

I.1 Introduction

Plusieurs secteurs de l'industrie font appel à la modélisation numérique. L'utilisation des éléments volumiques est devenue un outil auquel de plus en plus de professionnels ont recours, par exemple dans l'emboutissage de matériaux métalliques, la plasturgie, la piézoélectricité ou les structures composites. Dans l'analyse des structures, la plus part des solides sont modéliser par des approches d'éléments 1D et 2D. Cependant, l'hypothèse de la non variation de l'épaisseur adoptée pour développer les éléments bidimensionnels, peut conduire à des résultats erronés, même pour des structures minces, cet alternative conduit à utiliser les éléments volumiques pour tenir compte des effets 3D à travers l'épaisseur.

L'avènement d'ordinateurs plus puissants et plus rapides a permis l'utilisation des éléments finis tridimensionnels dans l'analyse des structures avec comportement plus complexes. L'homogénéisation macroscopique des composites avec différents types de renforcement est également un domaine qui nécessite par fois un modèle tridimensionnel. Les travaux de développement sont en cours de progression. A cet effet nous présentons dans ce chapitre la formulation de deux types des éléments :,

Les tétraèdres à 4 nœuds et les hexaèdres à 8 nœuds sont les types d'éléments les plus simples. Leurs géométries de référence possèdent un angle droit et leurs fonctions de base sont affines en coordonnées locales (figure 3b).

I.2 Généralité sur la méthode des éléments finis

I.2.1 Historique [1]

On utilise souvent la méthode de discrétisation et d'approximation numérique pour résoudre les problèmes scientifique et d'ingénierie qu'on rencontre couramment dans la vie

Le concept des éléments finis est obtenu de l'idée de discrétisation et d'approximation numérique. Si nous sommes menus à identifier l'évidence de l'apparition du concept des éléments finis, nous devons probablement retourner aux approximations géométriques des pyramides par les Egyptiens environ 5000 ans.

Si nous considérons par exemple l'approximation numérique de et comme le point de départ des éléments finis nous allons trouver des intérêts historique semblables en chine en

Egypte et en Grèce en l'an 1800 avant J.C. Les Egyptiens ont utilisé la correcte du volume des pyramides et Paires des cercles.

Archimède (287-212) avant J.C est un des nombreux mathématiciens et inventeurs qui ont utilisé les éléments finis pour déterminer le volume des solides. Plus rigoureusement, si nous considérons quelques solutions approximatives de l'élasticité et les problèmes structuraux comme le point de départ de la méthode des éléments finis, nous pouvons se référer au calcul historique du développement par Timoshenko. Si nous considérons l'émergence du concept de l'analyse des fermes comme point de départ de la méthode des éléments finis nous pouvons citer les travaux réalisés par Maxwell (en 1864), Castigliano (en1878) et Mohr durant la période 1850-1875.

En l'an 1915 Money en U.S.A a présenté la méthode de déflexion. En l'an 1929, Cross a publié sa méthode de distribution des moments de l'analyse des fermes.

En l'an 1943. Courant a proposé d'utiliser les fonctions d'interpolation polynomiales, c'est lui qui a établi les bases de la « M E F » en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation spatiale du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelle pour achever les solutions approximatives.

En l'an 1955, Argyris présente une approche unifiée des méthodes de déplacements et de forces. L'année suivante Turner et Clough publient une présentation systématique de la méthode des déplacements Ces deux publications sont particulièrement importantes et présentent véritablement le début de la méthode des élément finis comme technique de calcul des structures complexes.

I.2.2. Introduction à la méthode des éléments finis :

La MEF (Méthode des Eléments Finis) est mise en 1953 chez Boeing (Seattle, USA. Calcul des structure d'aile d'avion) ; on développa le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement).

Quant aux bases théoriques générales mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont données de 1954 a 1960 (argyris, kelsey), certaines idées apparurent auparavant, en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers

problèmes aux limites par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangles (Courant, 1943) ; mais elles restèrent sans suite.

L'expression éléments finis date de 1960(Clough) L'années 60 ont vu la MDF s'attaquer à tous les domaines du calcul des solides et des structure avant de déborde dans d'autres domaines : écoulement souterrains, transfert de chaleur, fluides, ect (Zienckiewicz, cheung, 1965) en fait l'ingénieur (aéronautique, génie civil et mécanique surtout) développent la MEF pour l'appliquer à leurs problèmes pratiques avant que les bases théoriques ne soient établies

Dès 1970 la méthode envahi tous les créneaux de l'ingénierie et les mathématiques appliquées il faut ajouter que son essor est dès le début et aujourd'hui encore indissociable de celui du ordinateurs.

1800		
	➢ Structure hyperstatiques	Navier 1819
	➢ Théorème de l'énérgie	Maxwell 1864
1900		Castigliano 1878
	➢ Méthode d'approximation	Raz 1908
		Galerkin 1915
	➢ Approximation par éléments finis	Courant 1943
	➢ Méthodes matricielles	Levy
	Développement de la méthode des forces dans l'industrie aéronautique	Garvey 1953
1955		
	➢ Concept "d'élément finis"	
	Méthode des forces	Argyris-Denke 1955
	Méthodes des déplacement	Argyris-Turner 1956

Tableau. I.1 Historique des méthodes modernes d'analyse des structures jusqu'à 1956.

I.2.3 Définition de la MEF

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnus pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

Par ailleurs la MEF est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans nombreux secteurs de l'industrie tel que : aérospatial, génie civil, construction navale, mécanique, …etc.

I.3 Formulation variationnelle

Considérons un corps solide élastique dans un état de petites déformations qui occupe le domaine V et sa frontière ∂V comme le montre la figure II.1. L'équation d'équilibre mécanique pour un solide soumis à des forces volumiques f_v s'écrit comme suit :

$$div\,\sigma + f_v = 0 \tag{I.1}$$

où σ est le tenseur des contraintes mécaniques.

L'équilibre s'écrit également ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_{Vx} &= 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_{Vy} &= 0 \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_{Vz} &= 0 \end{aligned} \tag{I.2}$$

avec $\langle U \rangle = \langle u \quad v \quad w \rangle = \langle \bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w} \rangle$ sur S_u

Soit $\vec{f_S}$ effort de surface appliqué sur la surface S_f

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z &= f_{Sx} \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z &= f_{Sy} \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z &= f_{Sz} \end{aligned} \tag{I.3}$$

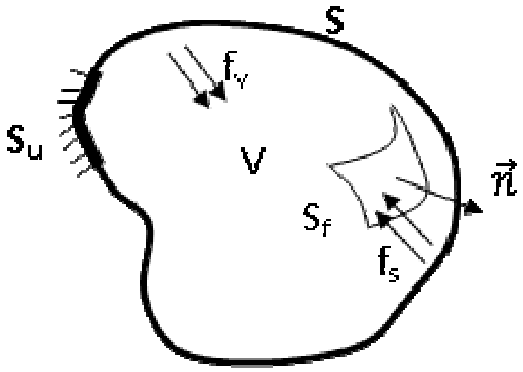


Figure I.1 Corps solide 3D

La méthode des résidus pondérés nous permet d'écrire la forme intégrale suivante:

$$W(u) = \int_v \langle \Psi \rangle \{R(u)\} dv = 0 \tag{I.4}$$

Avec $\{R(\vec{U}\} = \sigma_{ij,j} + f_i$ et $\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle$

l'équation (I.4) s'écrit :

$$W = \int_V \langle \Psi \rangle \{R(\vec{U}\} dV = \int_V \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_{Vx} \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_{Vy} \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + f_{Vz} \end{Bmatrix} dV \tag{I.5}$$

Cela conduit à la forme forte d'un problème d'élasticité tridimensionnel

$$W = \int_V \left(\Psi_u \left(\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_{Vx} \right) + \Psi_v \left(\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_{Vy} \right) + \Psi w \sigma xz,x + \sigma yz,y + \sigma zz,z + fVzdV \right. \tag{I.6}$$

I.3.1 Intégration par partie

I.3.1.1 Formule de Green à trois dimensions [2]

Soit le vecteur $\vec{n}$ la normale à la surface S , avec $\langle n \rangle = \langle n_x \quad n_y \quad n_z \rangle$, Figure I.2

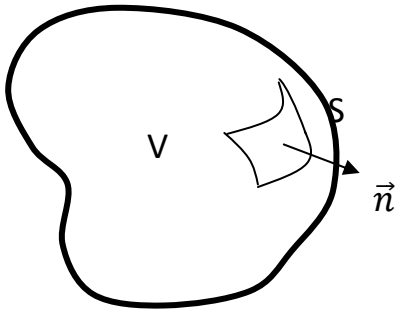


Figure I.2 Normale à la surface

Les relations de Green qui relient l'intégrale triple avec l'intégrale de surface sont :

$$\iiint_V \Psi . u_{,x}\, dx\, dy\, dz = -\iiint_V \Psi_{,x} . u\, dx\, dy\, dz + \oiint_S \Psi . u.\ n_x\, dS$$
$$\iiint_V \Psi . u_{,y}\, dx\, dy\, dz = -\iiint_V \Psi_{,y} . u\, dx\, dy\, dz + \oiint_S \Psi . u . n_y\, dS \qquad (I.7)$$
$$\iiint_V \Psi . u_{,z}\, dx\, dy\, dz = -\iiint_V \Psi_{,z} . u\, dx\, dy\, dz + \oiint_S \Psi . u . n_z\, dS$$

I.3.1.2 Forme intégrale faible du problème d'élasticité

L'équation (I.6) peut s'écrire comme suit :

$$W = \int_V \begin{pmatrix} \Psi_u(\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z}) + \Psi_v(\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \sigma_{yz,z}) \\ +\Psi_w(\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{z,z}) \end{pmatrix} dV + \int_V \langle\Psi\rangle \{F_v\}\, dV \qquad (I.8)$$

L'application des relations de Green (I.7), pour le cas des contraintes, nous permet d'écrire :

$$\int_V \Psi_u\ \sigma_{x,x}\, dV = -\int_V \Psi_{u,x}\, \sigma_x\, dV + \oiint_S \Psi_u . \sigma_x . n_x\, dS$$
$$\int_V \Psi_u\ \sigma_{xy,y}\, dV = -\int_V \Psi_{u,y}\, \sigma_{xy}\, dV + \oiint_S \Psi_u . \sigma_{xy} . n_y\, dS \qquad (I.9)$$
$$\int_V \Psi_u\ \sigma_{xz,x}\, dV = -\int_V \Psi_{u,z}\, \sigma_{xz}\, dV + \oiint_S \Psi_u . \sigma_{xz} . n_z\, dS$$

et

$$\int_V \Psi_v\ \sigma_{xy,x}\, dV = -\int_V \Psi_{v,x}\, \sigma_{xy}\, dV + \oiint_S \Psi_v . \sigma_{xy} . n_x\, dS$$
$$\int_V \Psi_v\ \sigma_{y,y}\, dV = -\int_V \Psi_{v,y}\, \sigma_y\, dV + \oiint_S \Psi_v . \sigma_y . n_y\, dS \qquad (I.10)$$
$$\int_V \Psi_v\ \sigma_{yz,z}\, dV = -\int_V \Psi_{v,z}\, \sigma_{yz}\, dV + \oiint_S \Psi_v . \sigma_{yz} . n_z\, dS$$

et également

$$\int_V \Psi_w\ \sigma_{xz,x}\, dV = -\int_V \Psi_{w,x}\, \sigma_{xz}\, dV + \oiint_S \Psi_w . \sigma_{xz} . n_x\, dS$$
$$\int_V \Psi_w\ \sigma_{yz,y}\, dV = -\int_V \Psi_{w,y}\, \sigma_{yz}\, dV + \oiint_S \Psi_w . \sigma_{yz} . n_y\, dS \qquad (I.11)$$
$$\int_V \Psi_w\ \sigma_{z,z}\, dV = -\int_V \Psi_{w,z}\, \sigma_z\, dV + \oiint_S \Psi_w . \sigma_z . n_z\, dS$$

La substitution de (I.9), (I.10) et (I.11) dans (I.8) se traduit par :

$$W = \int_V \left(\Psi_{u,x}\, \sigma_x + \Psi_{v,y}\, \sigma_y + \Psi_{w,z}\, \sigma_z + (\Psi_{u,y} + \Psi_{v,x})\sigma_{xy} + (\Psi_{u,z} + \Psi_{w,x})\sigma_{xz} + \right.$$
$$\Psi v,z+\Psi w,y\sigma yz\, dV+V\Psi Fv\, dV +S\Psi u.\sigma x\, nx+\sigma xy\, ny+\sigma xz\, nz+\Psi v.\sigma xy\, nx+\sigma y\, ny+\sigma yz\, nz+\Psi w.\sigma xz\, nx+\sigma yz\, ny+\sigma z\, nzdS \qquad (I.12)$$

Avec

$$\oint_S \begin{pmatrix} \Psi_u.\left(\sigma_x\, n_x + \sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z\right) + \Psi_v.\left(\sigma_{xy}\, n_x + \sigma_y\, n_y + \sigma_{yz}\, n_z\right) \\ \Psi_w.\left(\sigma_{xz}\, n_x + \sigma_{yz}\, n_y + \sigma_z\, n_z\right) \end{pmatrix} dS$$

$$= \oint_{S_u} \begin{pmatrix} \Psi_u.\left(\sigma_x\, n_x + \sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z\right) + \Psi_v.\left(\sigma_{xy}\, n_x + \sigma_y\, n_y + \sigma_{yz}\, n_z\right) \\ \Psi_w.\left(\sigma_{xz}\, n_x + \sigma_{yz}\, n_y + \sigma_z\, n_z\right) \end{pmatrix} dS$$

$$+$$

$$\oint_{S_f} \begin{pmatrix} \Psi_u.\left(\sigma_x\, n_x + \sigma_{xy}\, n_y + \sigma_{xz}\, n_z\right) + \Psi_v.\left(\sigma_{xy}\, n_x + \sigma_y\, n_y + \sigma_{yz}\, n_z\right) \\ + \Psi_w.\left(\sigma_{xz}\, n_x + \sigma_{yz}\, n_y + \sigma_z\, n_z\right) \end{pmatrix} dS \qquad (I.13)$$

Sachant que $\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$ sur S_u (I.14)

On obtient donc

$$W = \int_V \begin{pmatrix} \Psi_{u,x}\, \sigma_x + \Psi_{v,y}\, \sigma_y + \Psi_{w,z}\, \sigma_z + \left(\Psi_{u,y} + \Psi_{v,x}\right)\sigma_{xy} + \left(\Psi_{u,z} + \Psi_{w,x}\right)\sigma_{xz} \\ +\left(\Psi_{v,z} + \Psi_{w,y}\right)\sigma_{yz} \end{pmatrix} dV +$$

$$\int_V \langle \Psi \rangle \{F_v\}\, dV + \oint_{S_f} \left(\Psi_u.\, f_{Sx} + \Psi_v.\, f_{Sy} + \Psi_w.\, f_{Sz}\right) dS \qquad (I.15)$$

sous forme contractée

$$W = \int_V \left(\Psi_{u,x}\, \sigma_x + \Psi_{v,y}\, \sigma_y + \Psi_{w,z}\, \sigma_z\right) + \left(\Psi_{u,y} + \Psi_{v,x}\right)\sigma_{xy} + \left(\Psi_{u,z} + \Psi_{w,x}\right)\sigma_{xz} +$$
$$\Psi v,z + \Psi w,y \sigma yz\, dV + V\Psi Fv\, dV + Sf\Psi.fSdS \qquad (I.16)$$

I.3.1.2 Forme Intégrale (Méthode de Galerkine)

Supposons que les fonctions de pondérations sont prises au sens de Galerkine.

On aura donc

$$\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle = \langle \delta U \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle \qquad (I.17)$$

Rappelons que l'opérateur δ a les propriétés suivantes:

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \partial\left(\frac{\delta u}{\partial x}\right) \;;\; \delta(\delta u) = 0 \;;\; \delta\left(\int_v u\, dv\right) = \int_v \delta u\, dv$$
$$\delta(u + v) = \delta u + \delta v \;;\; \delta(u.v) = u\, \delta v + v\, \delta u = \delta(v.u) \qquad (I.18)$$
$$\delta(c.u) = c\, \delta u \text{ (c: constante)}$$

La forme faible devient

$$W = \int_V \left((\delta u)_{,x}\, \sigma_x + (\delta v)_{,y}\, \sigma_y + (\delta w)_{,z}\, \sigma_z + \left((\delta u)_{,y} + (\delta v)_{,x}\right)\sigma_{xy} + \left((\delta u)_{,z} + \right.\right.$$
$$\delta w,x \sigma xz + \delta v,z + \delta w,y\, \sigma yz\, dV + V\delta UFv\, dV + Sf\delta U.fSdS \qquad (I.19)$$

Ou encore

$$W = \int_V \begin{pmatrix} \delta u_{,x}\,\sigma_x + \delta v_{,y}\,\sigma_y + \delta w_{,z}\,\sigma_z + +\delta(u_{,y} + v_{,x})\sigma_{xy} + \delta(u_{,z} + w_{,x})\,\sigma_{xz} \\ + \delta(v_{,z} + w_{,y})\,\sigma_{yz} \end{pmatrix} dV$$

$$+ \int_V \langle \delta U \rangle \{F_v\}\, dV + \oint_{S_f} \langle \delta U \rangle . \{f_S\} dS \qquad (I.20)$$

Ou encore

$$W = \int_V \left(\delta\varepsilon_x\ \sigma_x + \delta\varepsilon_y\ \sigma_y + \delta\varepsilon_z\ \sigma_z + +\delta\gamma_{xy}\ \sigma_{xy} + \delta\gamma_{xy}\ \sigma_{xz} + \ \delta\gamma_{yz}\ \sigma_{yz}\right) dV$$

$$+ \int_V \langle \delta U \rangle \{F_v\}\, dV + \oint_{S_f} \langle \Psi \rangle . \{f_S\} dS \qquad (I.21)$$

Avec $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T$ et $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$,

On aura finalement

$$W = \int_V (\langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\})\ dV + \int_V \langle \delta U \rangle \{F_v\}\, dV + \oint_{S_f} \langle \delta U \rangle . \{f_S\} dS \qquad (I.22)$$

L'équation (I.22) est l'expression du théorème des travaux virtuels, dans sa formulation en déplacements virtuels, avec :

$\int_V (\langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\})\ dV$ Travail virtuel interne.

$\int_V \langle \delta U \rangle \{F_v\}\, dV$ Travail virtuel des efforts de volume.

$\oint_{S_f} \langle \delta U \rangle . \{f_S\} dS$ Travail virtuel des efforts de surface.

I.4 Approximations géométriques et cinématiques

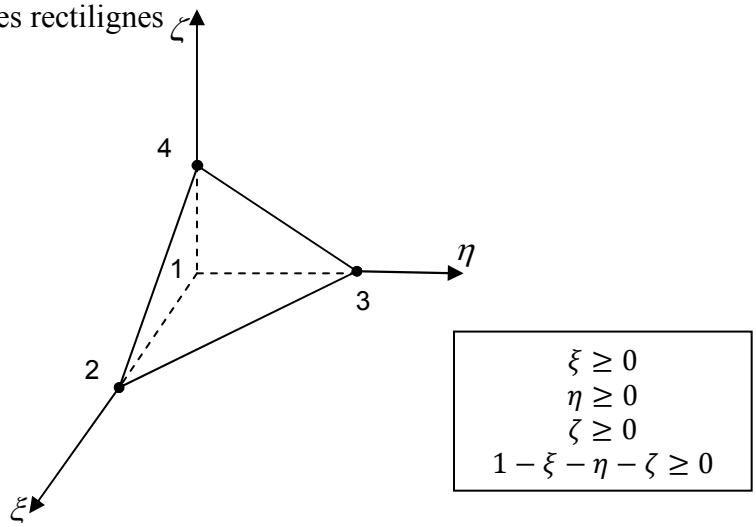
Soient (x, y, z) les cordonnées du point quelconque q traduisant la géométrie des éléments volumiques (tétraédrique ou hexaédrique) données par les approximations suivantes :

$$x = \sum_{i=1}^{n_d} N_i x_i \ \ ; y = \sum_{i=1}^{n_d} N_i y_i \ ;\ z = \sum_{i=1}^{n_d} N_i z_i \qquad (I.23)$$

avec : (x_i , y_i , z_i) sont les coordonnées du nœud *i* et n_d est le nombre de nœuds par élément (n_d = 4 pour l'élément tétraédrique (TET4) à 4 nœuds et n_d = 8 pour l'élément hexaédrique (H8).

Remarques:

- Pour l'élément tétraédrique, les surfaces ζ = cte (ou η= cte ou ζ = cte) sont dans le cas d'un élément à arêtes rectilignes, des plans parallèles aux faces de l'élément.
- Les coordonnées barycentriques sont parfois utilisées pour repérer un point q d'un tétraèdre à arêtes rectilignes



. **Figure.I.3** Elément tétraédrique à 4 nœuds

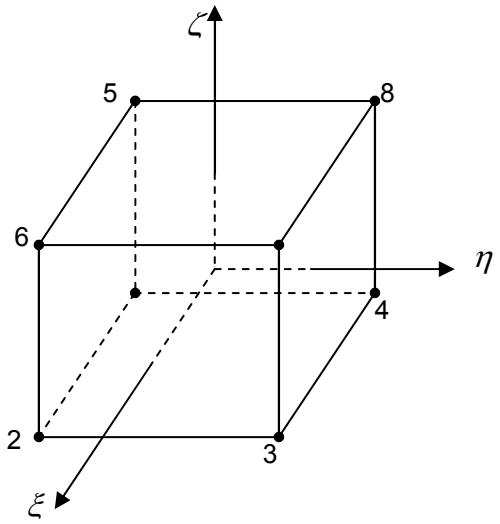


Figure.I.4 Eléments hexaédrique à 8 nœuds

Les fonctions d'interpolation N_i associées à l'élément volumique 3D sont [3] :

- Pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds (H8) :

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \quad , i = 1 \text{ à } 8 \tag{I.24}$$

où $-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$ et $-1 \le \zeta \le 1$.

- Pour l'élément tétraèdre à 4 nœuds (TET4) :

$$\langle N \rangle = \langle 1-\xi-\eta-\varsigma \quad \xi \quad \eta \quad \varsigma \rangle \qquad \textbf{(I.25)}$$

Avec

où $\xi \ge 0, \eta \ge 0$, $1-\xi-\eta-\varsigma \ge 0$.

Les expressions de ces fonctions de forme de l'élément tétraèdre et hexaèdre sont récapitulées dans les tableaux (I.2) et tableau (I.3).

i	$N_i(\xi,\eta,\zeta)$	$\{\partial N/\partial\xi\}$	$\{\partial N/\partial\eta\}$	$\{\partial N/\partial\zeta\}$
1	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1-η). (1-ζ)	- $\frac{1}{8}$(1-η). (1-ζ)	- $\frac{1}{8}$(1-ξ). (1-ζ)	-$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1-η)
2	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1-η). (1-ζ)	$\frac{1}{8}$(1-η). (1-ζ)	-$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1-ζ)	-$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1-η)
3	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1+η). (1-ζ)	$\frac{1}{8}$(1+η). (1-ζ)	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1-ζ)	-$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1+η)
4	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+η). (1-ζ)	-$\frac{1}{8}$(1+η). (1-ζ)	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1-ζ)	-$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+η)
5	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1-η). (1+ζ)	-$\frac{1}{8}$(1-η). (1+ζ)	-$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1-η)
6	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1-η). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1-η). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1-η)
7	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1+η). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1+η). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1+ξ). (1+η)
8	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+η). (1+ζ)	-$\frac{1}{8}$(1+η). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+ζ)	$\frac{1}{8}$(1-ξ). (1+η)

Tableau I.2 Fonctions de formes de l'élément Hexaèdre à 8 nœuds [2]

i	$N_i(\xi,\eta,\zeta)$	$\{\partial N/\partial\xi\}$	$\{\partial N/\partial\eta\}$	$\{\partial N/\partial\zeta\}$
1	$1-\xi-\eta-\zeta$	-1	-1	-1
2	ξ	1	0	0
3	η	0	1	0
4	ζ	0	0	1

Tableau I.2 Fonctions de formes de l'élément tétraédrique à 4 nœuds [2]

Utilisant une approximation iso-paramétrique, le champ de déplacements $\underline{u}_q$ d'un point quelconque q est donnée par les fonctions de formes définies précédemment , est le suivante :

$$\{u_q\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n_d}\begin{Bmatrix} N_i u_i \\ N_i v_i \\ N_i w_i \end{Bmatrix} \tag{I.26}$$

avec

$$\{u_i\}^T=\langle u_i \quad v_i \quad w_i\rangle \tag{I.27}$$

ou sous une forme matricielle :

$$\{u_q\}=\lfloor N_q\rfloor\{u_n\} \tag{I.28}$$

et

$$\lfloor N_q\rfloor=\begin{bmatrix} & < N_{ui} > & \\ \cdots & < N_{vi} > & \cdots i=1,n_d \\ & < N_{wi} > & \end{bmatrix} \tag{I.29}$$

où

$$\begin{aligned} \langle N_{ui}\rangle &= \langle N_i \quad 0 \quad 0\rangle \\ \langle N_{vi}\rangle &= \langle 0 \quad N_i \quad 0\rangle \\ \langle N_{wi}\rangle &= \langle 0 \quad 0 \quad N_i\rangle \end{aligned} \tag{I.30}$$

$\{u_n\}$ est le vecteur des degrés de liberté (ddl) nodaux contient 3 ddl (trois translations) par nœud, tel que:

$$< u_n > = \langle \cdots \quad u_i \quad v_i \quad w_i \quad \cdots \quad i = 1, n_d \rangle \tag{I.31}$$

I.5 Champs de déformations et de contraintes

I.5.1 Champs de déformations

En élasticité linéaire, le tenseur des déformations linéarisées est donné par :

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u_q\} \tag{I.32}$$

avec où [L] est l'opérateur différentiel tridimensionnel donné par :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^{T} \tag{I.33}$$

L'expression de déformations tridimensionnelles peut s'écrire sous forme nodale :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_n\} \tag{I.34}$$

Avec [B] est une matrice qui relie les déplacements aux déformations, obtenue par dérivation de la matrice des fonctions de forme (I.29). Cela se traduit par:

$$[B] = [L][N_q] \tag{I.35}$$

Donc la matrice déformation-déplacement est :

$$[B] = \begin{bmatrix} \cdots & \begin{matrix} \langle N_{ui,x} \rangle \\ \langle N_{vi,y} \rangle \\ \langle N_{wi,z} \rangle \\ \langle N_{ui,y} \rangle + \langle N_{vi,x} \rangle \\ \langle N_{ui,z} \rangle + \langle N_{wi,x} \rangle \\ \langle N_{vi,z} \rangle + \langle N_{wi,y} \rangle \end{matrix} & \cdots \quad i = 1, n_d \end{bmatrix} \tag{I.36}$$

Rappelons que la matrice [B] est de dimension $6\times(3\times n_d)$: 6×12 pour l'élément (TET4) et 6×24 pour l'élément H8. Les dérivées des fonctions de forme sont obtenues par les relations standards suivantes :

$$\begin{aligned}
\langle N_{\alpha i,x}\rangle &= j_{11}\langle N_{\alpha i,\xi}\rangle + j_{12}\langle N_{\alpha i,\eta}\rangle + j_{13}\langle N_{\alpha i,\zeta}\rangle \\
\langle N_{\alpha i,y}\rangle &= j_{21}\langle N_{\alpha i,\xi}\rangle + j_{22}\langle N_{\alpha i,\eta}\rangle + j_{23}\langle N_{\alpha i,\zeta}\rangle \quad ; \quad \alpha \equiv u,v,w, \quad i = n_d \\
\langle N_{\alpha i,z}\rangle &= j_{31}\langle N_{\alpha i,\xi}\rangle + j_{32}\langle N_{\alpha i,\eta}\rangle + j_{33}\langle N_{\alpha i,\zeta}\rangle
\end{aligned} \tag{I.37}$$

Où j_{lk} sont les termes de la matrice Jacobienne inverse $[j] = [J]^{-1}$.

La matrice Jacobienne (3×3) de la transformation iso-paramétrique peut être exprimée à partir de la définition de coordonnées de l'équation (I.23) comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \tag{I.38}$$

I.5.2 Champs de contraintes

Les composantes du tenseur des contraintes au point q sont déduites de la loi de comportement généralisée de Hooke utilisant la matrice d'élasticité $[H]$ (équation I.40) :

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \tag{I.39}$$

avec $\{\varepsilon\}$ définie par (I.34).

et

La matrice d'élasticité 3D [H], de dimension 6×6, s'écrit pour un matériau homogène et isotrope :

$$[H] = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{I.40}$$

Les deux coefficients de Lamé G et λ s'expriment en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{I.41}$$

On aura finalement :

$$\{\sigma\} = [H][B]\{u_n\} \tag{I.42}$$

$$< \sigma > = < \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} > \tag{I.43}$$

I.6 Matrice de rigidité et vecteur force élémentaires

I.6.1 Formulations élémentaires

La formulation intégrale définie dans le présent chapitre, § 1.3.1.2 peut être décrite sous forme d'une somme élémentaire:

Soit

$$W = \sum_{i=1}^{n_element} W_i^e \tag{I.44}$$

avec *i* est l'indice de l'élément.

et

$$W^e = \int_{V^e} (\langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\})\ dV^e + \int_{V^e} \langle \delta u_q \rangle \{F_v\}\, dv + \oint_{S_f^e} \langle \delta u_q \rangle . \{f_S\} dS \tag{I.45}$$

Nous pouvons écrire les accroissements virtuels de déplacement et de la déformation Eq.(I.34) par les expressions suivantes :

$$\langle \delta\varepsilon \rangle = \langle \delta u_n \rangle [B]$$
$$\langle \delta u_q \rangle = \langle \delta u_n \rangle [N_q]^T \tag{I.46}$$

La substitution du vecteur contrainte (I.39) et l'équation précédente (I.46) dans la forme intégrale élémentaire nulle (I.45), nous permet d'écrire:

$$\langle u_n \rangle \left[\int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e \right] \{u_n\} - \langle u_n \rangle \left\{ \int_{V^e} [N_q]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N_q]^T \{f_s\} dS^e \right\} = 0 \tag{I.47}$$

sous forme contractée :

$$\langle u_n \rangle \left[[K^e]\{u_n\} - \{F^e\} \right] = 0 \tag{I.48}$$

Nous déduisons donc

$$[K^e]\{u_n\} - \{F^e\} = 0 \tag{I.49}$$

avec respectivement $\{F^e\}$ et $[K^e]$sont le vecteur des forces nodales et la matrice de rigidité élémentaires :

Soient

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e \tag{I.50}$$

$$\{F^e\} = \int_{V^e} [N_q]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N_q]^T \{T\} dS^e \tag{I.51}$$

I.6.2. Calculs élémentaires

Pour obtenir la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des charges (équations (I.50) et (I.51) respectivement), l'intégration numérique sur l'élément de référence est nécessaire. La matrice de rigidité élémentaire exprimée dans le repère paramétrique (ξ, η, ζ) a donc l'expression suivante :

- Pour l'élément hexaédrique à 8 nœuds (H8) :

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left([B]^T [H][B] DetJ \right)_{\xi,\eta,\zeta} d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_i w_j w_k \left([B]^T [H][B] DetJ \right)_{\xi_i,\eta_i,\zeta_i} \tag{I.52}$$

- Pour l'élément tétraédrique à 4 nœuds (TET4) :

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [H][B] dV^e = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\xi-\eta} \left([B]^T [H][B] DetJ \right)_{\xi,\eta,\zeta} d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \sum_{i=1}^{Npi} w_i \left([B]^T [H][B] DetJ \right)_{\xi_i,\eta_i,\zeta_i} \tag{I.53}$$

Le vecteur des forces (équivalentes) élémentaires dues aux forces de volume et de surface est évalué avec une démarche similaire à celle suivie pour la matrice de rigidité élémentaire, le changement de base s'effectuant toujours via le déterminant du Jacobien.

$$\{F^{e}\} = \int_{V^e} [N_q]^T \{f_v\} dV^e + \int_{S^e} [N_q]^T \{T\} dS^e \tag{I.54}$$

- Pour l'élément H8 :

$$\{F^e\} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} w_i \left([N_q]^T \{f_v\} DetJ\right)_{\xi_i,\eta_i,\zeta_i} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_i w_j \left([N_q]^T \{f_s\} Det\ J_{S^e}\right)_{\xi_i,\eta_i} \tag{I.55}$$

- Pour l'élément TET4 :

$$\{F^{e}\} = \sum_{i=1}^{N_{pi}} w_i \left([N_q]^T \{f_v\} DetJ\right)_{\xi_i,\eta_i,\zeta_i} + \sum_{i=1}^{N_{pi}} w_i \left([N_q]^T \{T\} DetJ_{S^e}\right)_{\xi_i,\eta_i} \tag{I.56}$$

II.1.Introduction

Les technologies informatiques peuvent supporter les principales fonctions de conception et de modélisation qui précédent la fabrication. En 1963, Ivan Sutherland (du Massachusetts Institute of Technology a développé pour la première fois un système de dessin assisté par ordinateur appelé “Sketchpad”. Les premiers systèmes de conception assistés par ordinateur étaient un peu plus que des “planches à dessin électroniques”. Les systèmes modernes vont aujourd’hui au-delà de la conception et supportent la modélisation réaliste en 3 dimensions pour faciliter la visualisation, l’expérimentation, les calculs et les tests.

II.2.Définition

CATIA (« Conception Assistée Tridimensionnelle Interactive Appliquée »)) est un programme principalement utilisé dans l’industrie de fabrication et de conception, qui va permettre d’effectuer la conception 3D assisté par ordinateur "CAO 3D", cré par la société Dassault Aviation et commercialisé par IBM. Il est très utilisé en aéronautique et en automobile [4].

C'est en 1970 que le fabricant d'avions, "Avion Marcel Dassault", va développer le tout premier logiciel CATIA. - Initialement nommé CATI, il sera appelé CATIA, en 1981. Dassault va alors développer le logiciel et le commercialiser, en signant un accord avec la firme informatique IBM. - Boeing va, dès lors, décider d'utiliser CATIA comme logiciel de CAO, en 1984. Il sera alors l'utilisateur principal du logiciel. - En passant à la version 3 de son logiciel, CATIA va passer sous la plateforme UNIX en 1988. Ainsi, cela va permettre à IBM de racheter CADAM, principal concurrent de CATIA, et ainsi va naitre CATIA CADAM version 4, en 1992. En 1998, CATIA va subir l'une de ses grandes évolutions, le logiciel va complètement être refait, devenant la version 5, CATIA v 5. Abandonnant le "Mainframe", mais conservant l'Unix. - Il faudra attendre 2008 pour voir arriver la version 6. Avec, cette fois, l'arrêt de l'UNIX, pour un client CATIA [5,6,7].

II.3.Domaines d'application

CATIA étant un logiciel de CAO, il permet de créer des systèmes, du plus simple au plus complexe, et de les tester, afin de déterminer si celui-ci résistera ou non à une utilisation spécifique. Ainsi, on peut l'utiliser dans l'automobile, la recherche, l'électronique et beaucoup

d'autres domaines. CATIA permet également d'effectuer de la FAO (Fabrication Assistée par Ordinateur) et la conception mécanique.

CATIA est la solution n°1 au monde dans les domaines de la conception et de l'expérience des produits. Elle est utilisée par les sociétés les plus importantes de divers secteurs afin de développer les produits que nous voyons et utilisons au quotidien.

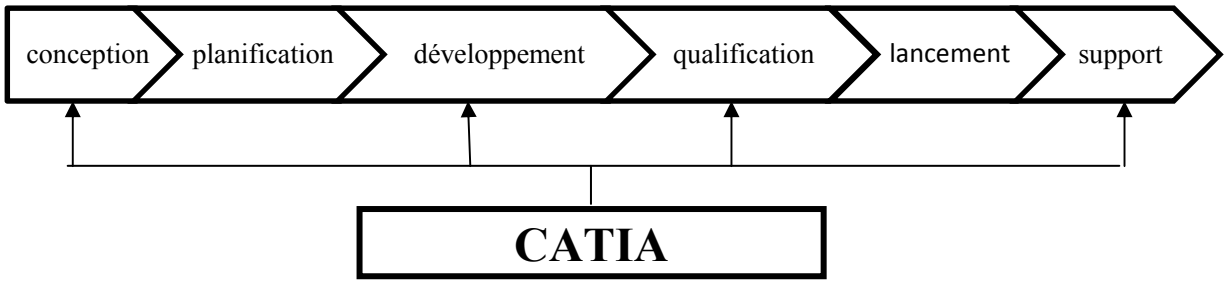


Figure II.1. Champ d'application de CATIA : de la conception à la réalisation

II.4.Caractéristiques techniques :

CATIA fonctionnait uniquement sur les plateformes Unix (AIX, HP-UX, IRIX et Solaris) en version 4. La version 5, disponible à partir de 1999, fonctionnait sous Solaris, AIX, HP-UX, IRIX et Windows, et proposait en outre une architecture de développement à partir d'interfaces VB et C++ permettant de personnaliser et de programmer ses propres modules à partir du noyau de base. En V6, seul Windows est supporté côté client, bien que certains composants serveur soient supportés sous Unix.

Le logiciel fournit une large gamme de solutions intégrées pour couvrir tous les aspects de design et de fabrication. Parmi les nombreuses fonctionnalités de base, on peut citer :

- Conception de pièces
- Assemblages
- Rendu réaliste.
- Dessin interactif et génératif
- Interfaces DXF/DWG, IGES

Il permet ainsi de concevoir des pièces et des assemblages de pièces directement en 3 dimensions sans dessiner de plan. Lorsqu'on parle de la version 5, on utilise souvent la notion

de maquette numérique. Ce terme désigne l'ensemble des données informatiques qui permet de manipuler un objet aussi bien ou mieux qu'on ne pourrait le faire avec une maquette réelle ou un prototype.

On peut tester sa résistance à diverses contraintes, vérifié qu'un sous-ensemble est montable ou démontable, s'assurer que la mobilité des composants les uns par rapport aux autres ne génère pas de collision...etc.

La maquette numérique permet de diminuer les coûts, les délais et d'augmenter la qualité car on évite de passer par une phase de prototype ou de maquette réelle. De plus, les modifications ultérieures sur les pièces sont beaucoup plus faciles à réaliser.

II.5.Commande de base :

C'est L'ensemble des icônes qui possède l'accès aux différentes fonctions du logiciel

II.5.1.Interface graphique

L'interface CATIA a l'aspect suivant, Figure II.2.

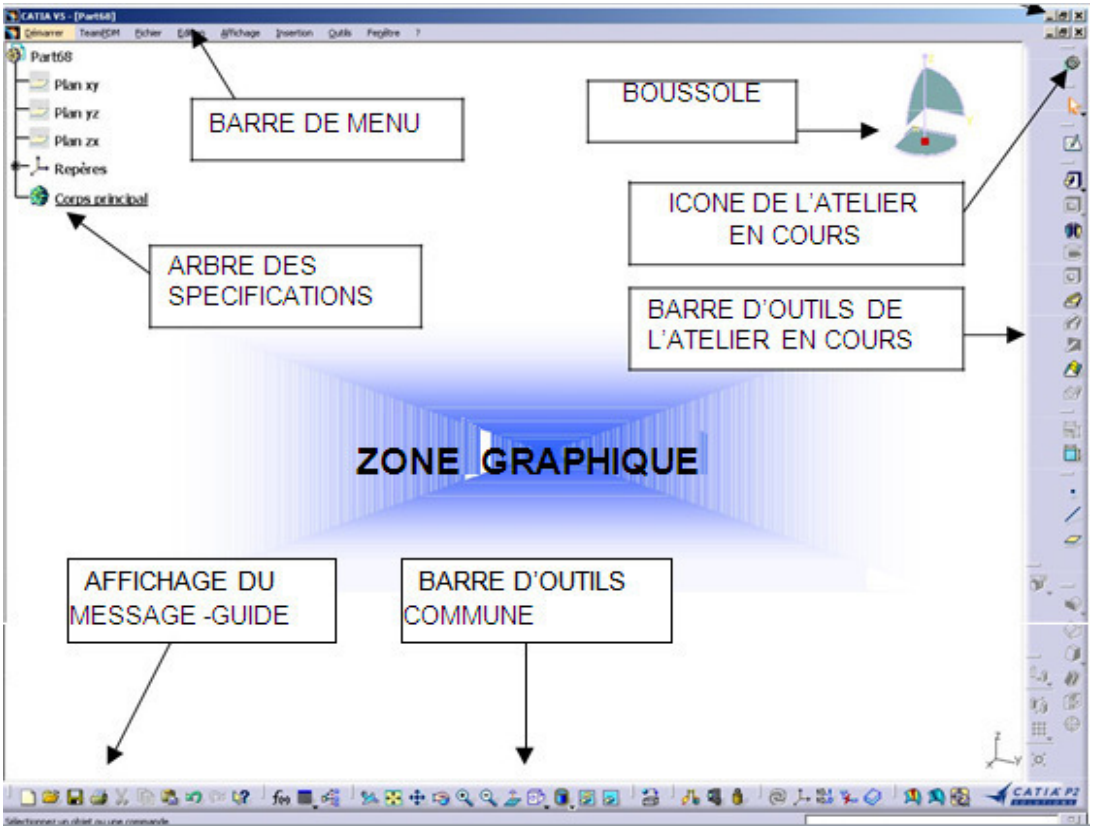


Figure II.2 Interface graphique de CATIA v5

Grâce au module de fabrication, on peut simuler l'usinage des pièces sur des machines à commande numérique et on peut générer automatiquement le fichier d'usinage qui est utilisé par la machine numérique réelle.

CATIA V5 est un logiciel de CAO 3D volumique et surfacique de nouvelle génération. Il fait appel à des opérations élémentaires paramétriques pour générer les différents objets géométriques, contrairement aux logiciels de la génération précédente qui fonctionnaient strictement à partir d'opérations booléennes (CATIA V4, EUCLID 3).

CATIA V5 est organisé en modules fonctionnels nommés "Ateliers" permettant chacun de créer ou de modifier un type d'objet bien précis.

Tous les modules qui vont être décrits ci-dessous interagissent entre eux d'une manière très simple et très conviviale. Les modules les plus intéressants pour un apprentissage rapide sont illustrés sur le tableau II.1.

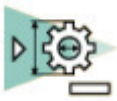
	Sketcher: permet de faire l'esquisse d'un profil en 2D. C'est donc le point de départ obligé pour toute création d'objet.
	Part Design: module utilisé pour la conception de pièces mécaniques en 3D. Ce module est exploité de pair avec le sketcher. Il permet un paramétrage 3D pendant ou après la conception.
	Assembly Design: permet de gérer un assemblage de pièces. Des contraintes mécaniques sont utilisées pour positionner les pièces et établir des contacts. Il offre en outre la possibilité de vérifier la cohérence de l'assemblage : interférence, analyse de distance,…
	Generative Part/Assembly Structural Analysis: permet d'effectuer une analyse E.F. de premier niveau, de la pièce ou de l'assemblage (analyse de contraintes et analyse vibratoire). Le tout se fait d'une manière transparente pour l'utilisateur.
	Wireframe & Surface: c'est un complément du module Part Design pour la création d'éléments de construction filaires ou surfaciques.
	**Generative Drafting:** possède les outils nécessaires pour la création de dessins industriels (DAO). Cela peut se faire à partir des pièces 3D ou en utilisant la méthodologie 2D. La cotation dessin est créée automatiquement à partir des contraintes 3D.

Tableau II.1 modules d'apprentissage de CATIA v5

II.5.2.Eléments actifs

La notion d'éléments actifs est très importante. Les deux formes ci-dessous (Figure II.3) illustrent des situations différentes. L'objet de travail est très vite repéré car il est souligné dans l'arbre. Pour définir un corps en temps qu'élément actif, il faut amener le pointeur de la souris dessus, cliquer sur le bouton droit de la souris et choisir Définir l'objet de travail (Défini in Work Object).

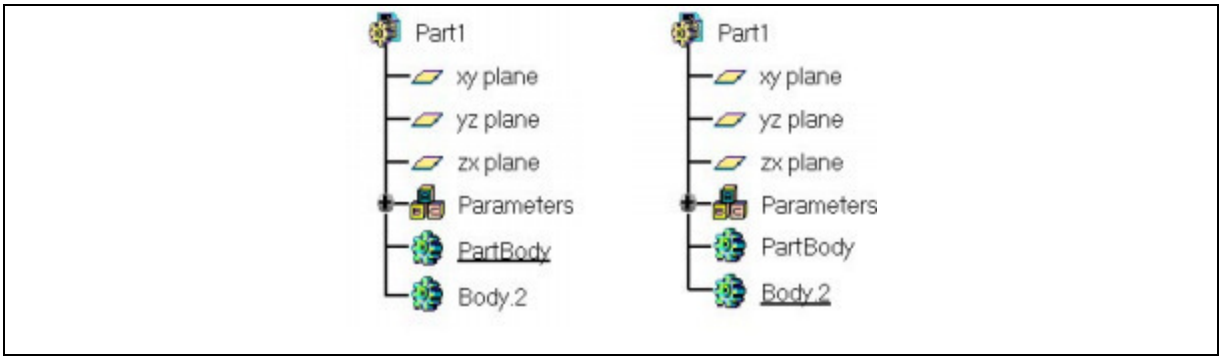


Figure II.3Définition de l'objet du travail

II.5.3. Sélection des objets

A l'aide de la souris, il y a moyen de sélectionner certaines parties de la pièce : un point particulier, une arrête, un axe, une face, un plan. La partie sélectionnée est mise en surbrillance. Pour en sélectionner plusieurs, il faut maintenir la touche CTRL enfoncée.

La sélection d'objets peut aussi se faire à partir de l'arborescence.

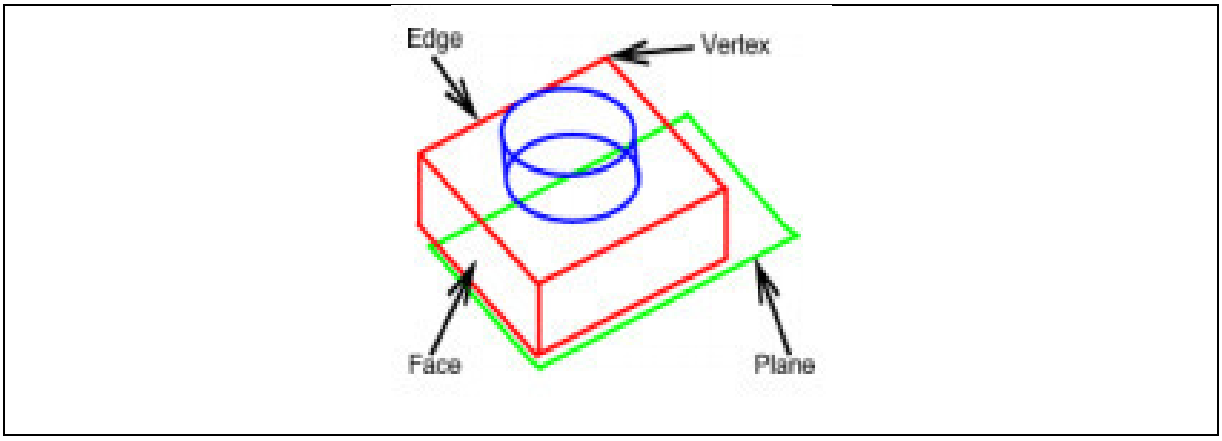


Figure II.4 la sélection des objets

II.5.4.Fonctionnement des barres d'outils

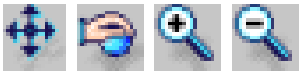
Les fonctions faisant appel à des sous menus possèdent une icône à flèche, sur laquelle on clique pour accéder au menu développé. L'icône affichée est celle de la dernière fonction utilisée.

Figure. II.5 fonction sous menus

II.5.6. Déplacement et zoom des éléments à l'écran

Avec la souris

- Pour translater les éléments : maintenons appuyé le bouton central de la souris (ou la roulette) et déplacons la souris.
- Pour effectuer une rotation des éléments : maintenons enfoncés le bouton de gauche et le bouton central et déplaçons la souris.
- Pour faire un zoom : maintenons appuyé le bouton central, cliquons sur le bouton de gauche, puis déplaçons la souris en avant ou en arrière (zoom + ou -) avec les icônes de la barre d'affichage
- Pour recentrer les éléments dans la fenêtre, il suffit d'appuyer sur l'icône .



- **Figure .II.6** Déplacement et zoom des éléments à l'écran

II.6.Apprentissage de quelques modules

II.6.1.Sketcher et Part Design

Pour ouvrir un nouveau document de type Part design, il existe plusieurs méthodes :

- Cliquer sur l'icône Fichier→Nouveau...et choisir → Part dans la fenêtre qui s'ouvre
- Choisir Démarrer → Conception Mécanique → Part Design

II.6.2. Création d'un contour

Pour entrer dans la fenêtre de travail du sketcher, il faut sélectionner un plan

- à partir du repère ou de l'arbre,
- à partir d'une face de l'objet

→ Puis cliquer sur l'icône

Nous pouvons alors commencer votre profil en cliquant sur les icônes suivants :

Figure.II.7. création d'un contour

Les coordonnées des points s'affichent dans la barre d'état comme celle ci-dessous (elles peuvent être rentrées manuellement).

Figure II.8. barre d'état des coordonnées des points

Sous certains icônes, on voit apparaître une flèche noire. En cliquant dessus avec le bouton gauche, une autre boîte s'ouvre contenant d'autres options.

Figure II.9 Autres options de la barre d'état

Nous avons la possibilité de faire plusieurs opérations sur votre profil : arrondi, chanfrein, rélimitation, cassure, symétrie, projection d'élément 3D.

Figure II.10.opération sur profil

La fonction de relimitation est particulièrement intéressante pour les profils complexes. Lorsqu'on clique sur l'icône, la barre d'options apparaît.

Figure II.11 barre d'option relimitation

Si l'icône gomme est enfoncé, cela permet de supprimer certains éléments si ceux-ci intersectés d'autres éléments du sketcher. Un exemple est illustré sur la figure ci-dessous :

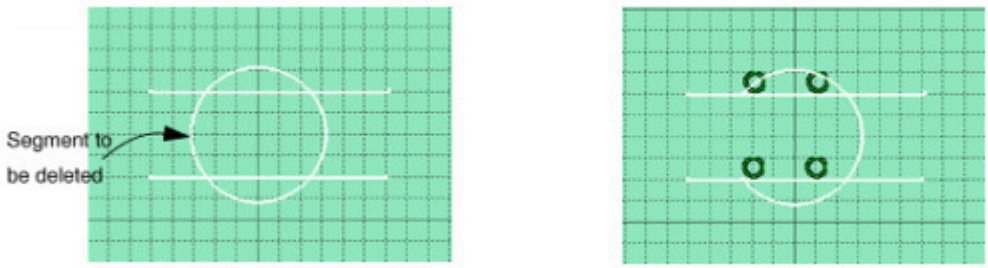


Figure II.12 suppression et intersection des éléments

II.6.3. Définition des contraintes

Définir des contraintes signifie paramétrer la géométrie de manière à la rendre plus facilement modifiable par la suite. En effet, une modification de la géométrie se fera simplement en modifiant les contraintes.

Les contraintes à imposer sur votre esquisse sont de deux types :

- ***contraintes géométriques***

Nombre d'éléments		
1	**2**	**3**
Fixe horizontal vertical	Coïncidence Concentricité Tangence Parallélisme Point milieu perpendicularité	Symétrie point équidistant

Tableau II.2 contraintes géométriques

- ***contraintes dimensionnelles***

Nombre d'éléments	
1	**2**
Longueur Rayon /diamètre	Distance Angle

Tableau II.3 contraintes dimensionnelles

Il est conseillé d'imposer d'abord les contraintes géométriques, puis seulement après les contraintes dimensionnelles.

Pour définir une contrainte, sélectionnons le ou les éléments qui nous intéressent et cliquons sur l'icône.

Une boîte de dialogue s'ouvre et nous pouvons alors choisir parmi les contraintes qui sont disponibles.

II.7. Eléments de référence

Il existe trois types d'éléments de référence: points, droites et plans. Générés dans l'espace 3D indépendamment des esquisses, ils sont utilisés pour servir de base à d'autres éléments et apparaissent dans l'arbre comme "corps surfaciques".

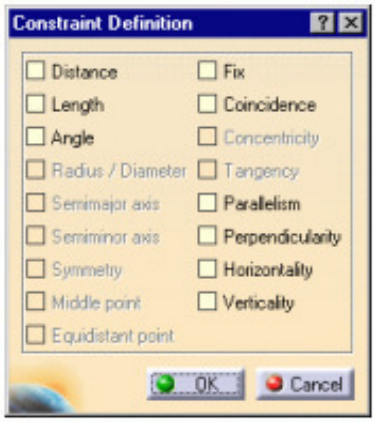


Figure II.13 les différentes contraintes

Des symboles apparaissent sur le sketcher :

Symbole	Signification
	Perpendiculaire
	Parallèle
	Horizontal
	Vertical
	Coïncide
3.605551	Dimension

Figure II.14 symboles de sketcher

II.7.1.Utilisation des éléments de référence

Les principales utilisations sont:

- Point servant d'origine à un repère local.
- Point servant à positionner un trou.
- Droite définissant une direction (axe d'un repère local).
- Plan utilisé comme support d'esquisse.
- Plan utilisé pour une opération de coupe.

II.8. Création des volumes

Sur CATIA V5, on peut générer des volumes de deux manières :

1. A partir d'un profil plan quelconque placé dans une esquisse et transformé par une opération d'extrusion ou de révolution autour d'un axe. On parle de composants issus d'un contour. Même les volumes simples doivent être générés de cette manière. Il n'existe pas de fonction spéciale permettant de générer un cube, un pavé, un cylindre…Il faudra créer une esquisse contenant un carré, un rectangle, un cercle et l'extruder.
2. À partir d'une surface existante par remplissage ou ajout d'épaisseur.

La première méthode est la plus courante et couvre la majorité des volumes de forme simple. La méthode surfacique ne s'impose que pour réaliser des formes gauches ou des volumes à sections évolutives.

On peut effectuer des opérations sur des volumes existants, telles que chanfreins, congés, dépouilles…Ces opérations sont nommées composants d'habillage.

Normalement, il n'est pas nécessaire d'utiliser des opérations booléennes pour générer les volumes, car toutes les fonctions de base existent en version "ajout" ou "retrait" de matière. Les fonctions booléennes classiques existent cependant lorsque l'on travaille en utilisant différents corps de pièces et peuvent s'avérer utiles dans certains cas particuliers.

II.8.1.Composants d'habillage

Tous les composants d'habillage s'appuient sur un solide existant que l'on va modifier. Ils ne permettent donc pas de créer des volumes.

Ces opérations sont définies en spécifiant des faces ou des arêtes sur les volumes à traiter.

Les fonctions comportent de nombreux paramètres de réglage et peuvent être délicates à mettre en œuvre dans le cas de géométries complexes.

II.9.Transformations

Ces opérations permettent d'effectuer des transformations géométriques sur des éléments ou des corps de pièces:

- Translation
- Symétrie
- Rotation

- Homothétie (facteur d'échelle)

Selon le cas, les transformations s'appliquent à un corps de pièce ou à un élément seul, et permettent une opération avec ou sans duplication (voir aussi §7.2 *création d'un corps de pièce*).

II.9.1.Application de transformations

Icône		Opération	Elément transformé	Éléments d'entrée
		translation	Corps de pièce courant	1 axe + 1 distance
		rotation	Corps de pièce courant	1 axe + 1 angle
		symétrie	Corps de pièce courant OU élément sélectionné	1 point, 1 droite ou 1 plan
		Répétition rectangulaire	Corps de pièce courant OU élément sélectionné	1 ou 2 directions + nombre d'instances et espacement dans chaque direction
		Répétition circulaire	Corps de pièce courant OU élément sélectionné	1 axe + 1 angle + nombre d'instances OU 1 axe + angle total + incrément
		répétition	Corps de pièce courant OU élément sélectionné	1 esquisse de points
		Symétrie avec duplication	Corps de pièce courant OU élément sélectionné	1 plan
		Facteur d'échelle	Corps de pièce courant	1 point + 1 valeur du facteur OU 1 plan + 1 valeur de facteur

Figure II.15 applications de transformation

II.10.Opérations booléennes

Les opérations booléennes utilisent la notion de *corps de pièce.* Lorsque l'on crée une pièce, un *corps principal* est systématiquement créé, il contient par défaut tous les composants définissant le solide. Pour pouvoir effectuer des opérations booléennes, la pièce doit être composée au minimum de 2 corps de pièce. Les opérations booléennes sont:

- L'ajout (union)
- Le retrait (soustraction)
- L'intersection
- La relimitation
- L'assemblage

II.10.1.Utilisation des opérations booléennes

Ces opérations permettent d'effectuer des retraits ou ajouts de matière de formes complexes qui ne peuvent pas être obtenus avec les composants de retrait/ajout issus d'un contour.

II.10.2.Création de corps de pièce

Il est obligatoire de créer des corps de pièces pour utiliser les opérations booléennes, mais ils peuvent être intéressants à utiliser pour effectuer des groupements d'éléments, et en particulier pour effectuer des transformations géométriques sur des sous-ensembles distincts. Pour créer un nouveau corps de pièce, utiliser l'icône ou le menu "insertion".

Le corps de pièce apparaît alors dans l'arbre des spécifications.

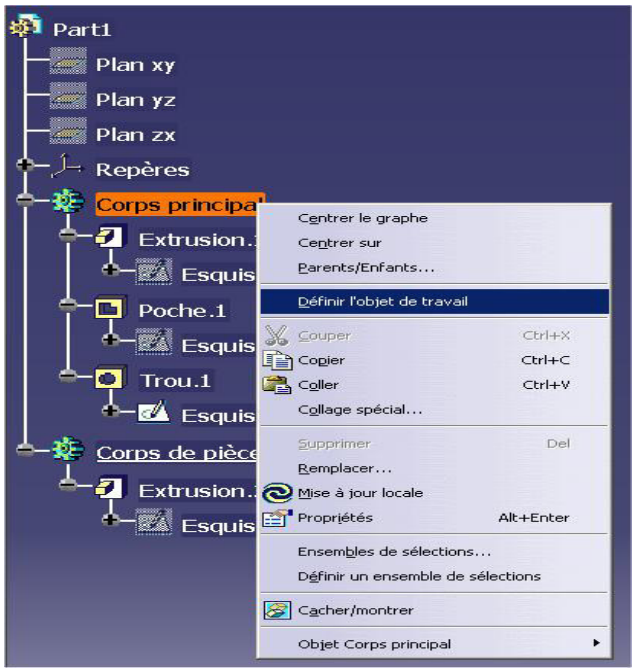


Figure II.16 l'arbre de spécification

II.10.3.Création d'opérations booléennes

Pour effectuer une opération booléenne, on ne peut désigner que 2 éléments à la fois. Si l'un des corps est le corps principal, il doit être toujours désigné en second.

Icône	Opération	Elément d'entrée	Résultat
	Assemblage	corps à assembler puis corps de base	Union ou soustraction selon les composants assemblés (ajout ou retrait)
	Ajout	corps à ajouter puis corps de base	1 corps de pièce unique obtenu par union
	Retrait	corps à retirer puis corps de base	1 corps de pièce unique obtenu par soustraction
	Intersection	2 corps de pièce	1 corps de pièce unique obtenu par intersection
	Relimitation partielle	2 corps de pièce + faces à conserver + faces à retirer	1 corps obtenu par union suppression d'éléments sélectionnés n'appartenant pas à l'intersection
	Retrait de volumes	1 corps de pièce + faces à conserver + faces à retirer	Supprime les volumes disjoints appartenant à un même corps de pièce

Figure II.17création d'opérations booléennes

II.11.Gestions des éléments

II.11.1 Édition des propriétés

Les fonctions permettant d'obtenir des informations ou de modifier un élément ou un corps de pièce sont accessibles au moyen du menu contextuel par clic droit sur la pièce ou dans l'arbre. Le menu propose alors différentes fonctions:

- La commande *définir l'objet de travail* définit à quel corps de pièce ou élément s'appliquent les opérations effectuées (transformations géométriques en particulier).
- la commande *copier/coller* permet de dupliquer des opérations ou éléments, avec ou sans lien avec l'original (collage spécial).

- La commande *supprimer* supprime l'élément. Si cet élément a des enfants (éléments liés), un menu signale que les enfants seront aussi supprimés.
- La commande *Objet xxx* permet d'accéder au menu de création/édition spécifique de l'élément sélectionné.
- La commande *parents/enfants* permet de visualiser les liens entre les différents éléments.
- La commande *cacher /montrer* permet de basculer les éléments entre la couche visible et invisible.

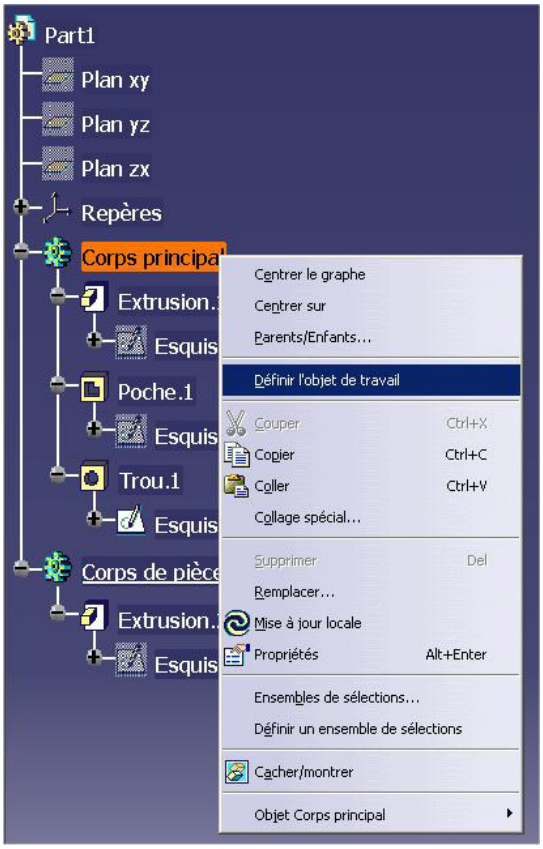


Figure II.18 commande à différentes fonctions

II.11.2.Divers outils

	Appliquer matériau	Corps de pièce + matériau	Définit le matériau utilisé pour les caractéristiques mécaniques d'un corps de pièce
	Mesure relative	2 éléments	Donne la distance et l'angle entre les éléments dans le repère global ou local
	Mesure absolue	Élément ou corps de pièce	Donne des informations géométriques sur un élément (position, surface, volume...)
	Mesure d'inertie	Corps de pièce	Donne les informations d'inertie: coord. du CdG, moments d'inertie, volume, masse volumique
	Mise à jour	Corps de pièce	Force la mise à jour d'un solide après une modification

Tableau II.4 divers outil de Catia

II.12.Avantages

- La création des pièces 3D de votre choix, qu'il s'agisse d'esquisses 3D ou d'assemblages industriels extrêmement détaillés
- La conception relationnelle immuable : un nouveau moyen de gérer les liens entre les objets et les comportements associés des assemblages configurés
- Une transition harmonieuse des méthodologies de conception 2D vers les méthodologies de conception 3D.
- Une mise à jour des dessins cohérente et efficace, dispensant l'utilisateur d'une intervention supplémentaire.
- Des outils orientés processus permettant de déterminer les objectifs du procédé de fabrication dès les premières phases de la conception.
- Une large gamme d'applications de design d'outils adaptée aussi bien aux outils génériques qu'aux moules et aux matrices.
- Des technologies de surfaçage mécanique avancées qui reposent sur une puissante méthode de modélisation basée sur les spécifications.
- Tirer parti de l'une des plates-formes de développement système basée sur les modèles les plus performantes pour optimiser le développement et la validation de systèmes et de produits complexes.
- Veiller au respect des exigences et des règles du marché tout en réduisant les délais de mise sur le marché et les coûts dans le cadre d'une ingénierie des exigences de tout premier ordre.

- Assurer la collaboration entre toutes les disciplines pour définir une architecture système complète au moyen de plusieurs vues de composants, opérationnelles et fonctionnelles.
- Vérifier le comportement de produits et de systèmes complexes couvrant plusieurs disciplines d'ingénierie grâce à une modélisation et une simulation basées sur Modelica.
- Intégrer les systèmes incorporés et les processus de conception 3D pour tirer parti de systèmes incorporés intelligents lors de la simulation 3DEXPERIENCE de systèmes et produits mécatroniques complexes.

III.1.Introduction

L'usage de code de calcul Catia est très fréquent dans les domaines de la conception et de la fabrication industriels, que ce soient : mécanique, aéronautique et l'aéronautique spatiale. On trouve parallèlement, que les codes de calcul Abaqus, Ansys,..etc, sont largement utiliser dans le domaine académique et de la recherche. Leur puissance dans le domaine des matériaux composite est communément approuvée, En revanche, le logiciel CATIA avec ces dernières versions a montré également sa puissance dans la modélisation des structures composites. Néanmoins, son usage dans la modélisation du comportement des matériaux composites n'est pas encore vulgarisé. A cet effet, Une étude dans ce contexte est nécessaire afin de se familiariser avec son interface pour aboutir à une modélisation fiable de ce type de matériaux.

Le présent chapitre est une exploitation directe des outils liés aux matériaux composites disponibles dans le logiciel CATIA. L'objectif est de calculer les propriétés mécaniques d'un composite à renfort unidirectionnel, en utilisant la notion de volume élémentaire représentatif «VER» dans la technique d'homogénéisation, et de faire une validation numérique avec des résultats obtenus par des modèles d'homogénéisation analytiques d'une part, et de réaliser une application sur le comportement en flexion d'une structure sandwich, d'autre part.

III.2 Matériaux composites à renfort unidirectionnel

Pratiquement tous les matériaux composites sont constitués d'éléments discontinus appelés renforts, noyés dans une phase continue appelée matrice.

Schématiquement, les renforts assurent une part importante de la tenue mécanique (rigidité et résistance) du composite, tandis que la matrice maintient les renforts en position, transfère les efforts entre eux, et assure toutes les autres fonctions techniques. Il peut par exemple s'agir d'une protection contre diverses agressions (thermiques, chimiques, chocs...), de fonctions esthétiques (couleur, aspect...), et de donner sa forme extérieure au produit fini. Les renforts peuvent avoir plusieurs géométries, et les deux constituants peuvent être réalisés dans de nombreux matériaux.

Afin de déterminer les propriétés mécaniques des matériaux composites monocouche pour notre cas, la notion des VER est largement utilisée. Cependant, différentes approches peuvent mener à cet objectif. En outre des modèles analytiques (bornes de Voigt et Reuss, Auto-

cohérent,...etc), la modélisation par éléments finis est également utilisée. Le choix de VER dépend de l'orientation et la géométrie des fibres.

Dans cette partie, On essaye de confronter les propriétés mécaniques obtenues par le code CATIA et celles obtenues par les approches analytiques précitées. Deux types de VER du même matériau composite sont analysés, à savoir : un VER réduit avec une seule inclusion et un deuxième étendu avec 27 fibres.

III.2.1 Volume élémentaire représentatif réduit (une seule fibre)

Considérant un matériau composite monocouche à renfort unidirectionnel, les propriétés mécaniques de la matrice et de la fibre sont : E_m = 1,7346 GPa, ν_m = 0.4, E_f = 44.52 GPa, ν_f = 0.15. Le VER est considéré dans un premier cas par la présence d'une seule inclusion, ses dimensions sont donnés comme suit : L= 250 mm ; b = 80 mm h=80 mm), Figure III.1 & tableau III.1. La géométrie de la fibre est définie comme suit : L_f= 250 mm, D_f=50 mm, figure III.2. Le VER est simplement appuyé sur une extrémité et soumis à une charge de traction uniformément répartie sur l'autre extrémité, Figure III.3.

La conception de la matrice est basée sur les techniques habituelles de la DAO : à partir d'une surface 2D (Sketcher), On dessine le volume et on enlève la matière par la suite, Figure III.1.

La fibre est construite par l'extension tridimensionnel d'un contour circulaire plein. elle est ensuite insérée dans la matrice (matériau 2) , avec les contraintes suivantes:

- Coïncidence.
-Distance

La liaison entre la fibre et la matrice est supposée contact (soudé) .Elle est assuré par le biais de la barre propriété de connexion dans le menu connexion générale d'analyse dans CATIA.

La structure est maillée par des éléments tétraédriques, le maillage est fait d'une façon automatique, Les détails sur le maillage utilisé sont récapitulés dans le poste-traitement.

Après avoir lancer le calcul, le code CATIA utilise son solveur pour nous fournir: la déformée, les déplacements et les contraintes de Von-mises sous forme de valeurs (voir Annexe A.1) ou des iso-valeurs (Fig III.4).

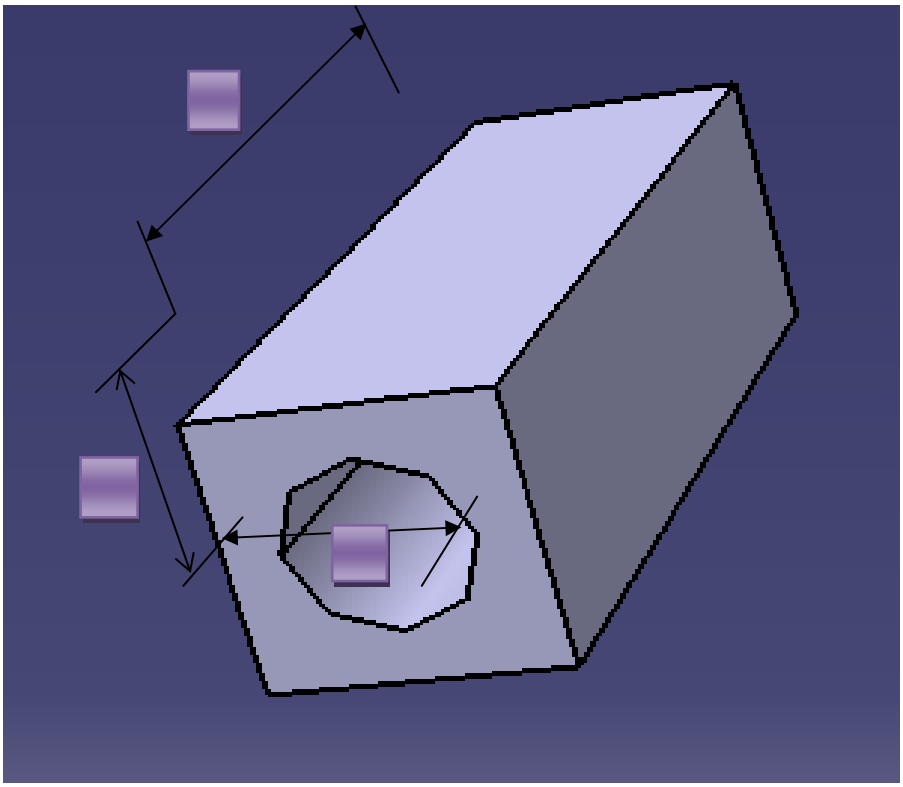


Figure III.1 Géométrie de résine

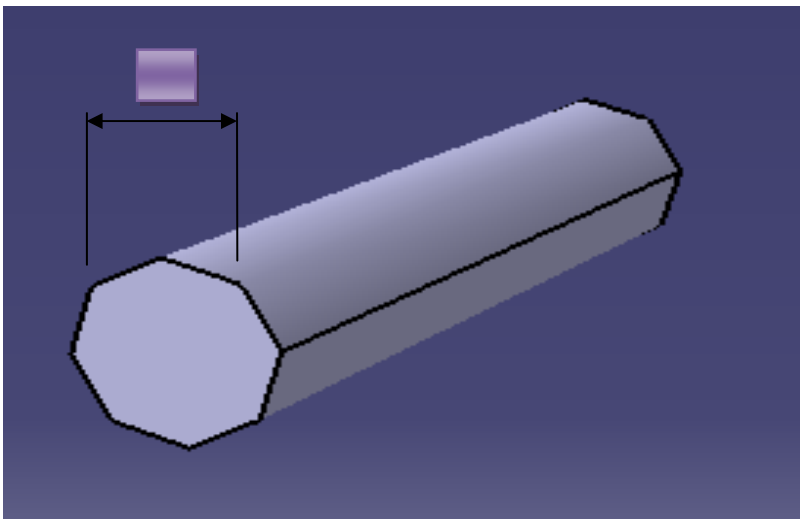


Figure.III.2 Géométrie de fibre

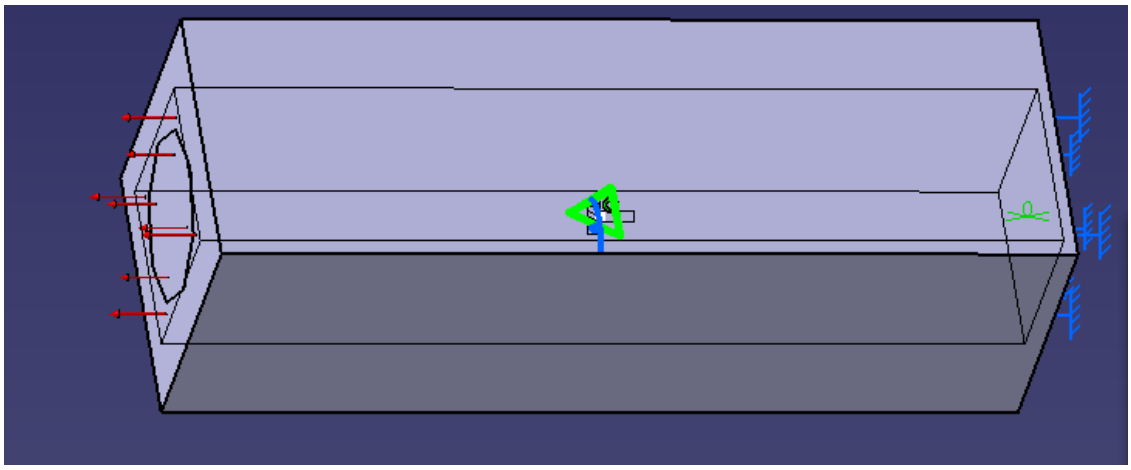


Figure.III.3 Le VER : conditions aux limites

L'analyse du déplacement maximum de la structure, tableau III.1. nous permet de calculer le module de Young de VER. La loi de Hooke est utilisée dans ce sens pour définir le comportement de la structure tridimensionnelle. La relation entre la contrainte/déformation est définie par:

$$\sigma = E.\varepsilon \qquad \text{(III .1)}$$

Avec

$$\sigma = \frac{F}{S} \qquad \text{(III .2)}$$

La déformation est par définition :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad \text{(III .3)}$$

D'après le tableau III.1, le module de Young est de l'ordre de 3 .685 GPa

Force (N)	100
Longueur (mm)	250
Surface (mm^2)	6400
Déplacement (mm)	$1.06\ 10^{-3}$
Module de Young E (GPa)	**3 .685**

Tableau.III.1 Paramètres liés à la loi de Hooke, module de Young, cas d'une seule fibre

Parallèlement, nos résultats éléments finis sont confrontés avec différents modèles analytiques d'homogénéisation. Les modèles utilisés sont : modèle de Voigt, modèle de

Reuss, le modèle Auto-cohérent, le modèle de Neerfeldhillfz. Les valeurs obtenus sont regroupées dans le tableau III.2.

Modèle analytique	Module de Young E (GPa)
Voigt	11.01
Reuss	2.16
Auto-coherente	7.8887
Diluée	2.9356
Neerfldhillfz	6.7416
M.E.F.	**3 .685**

Tableau.III.2. Modules de Young de la méthode analytique

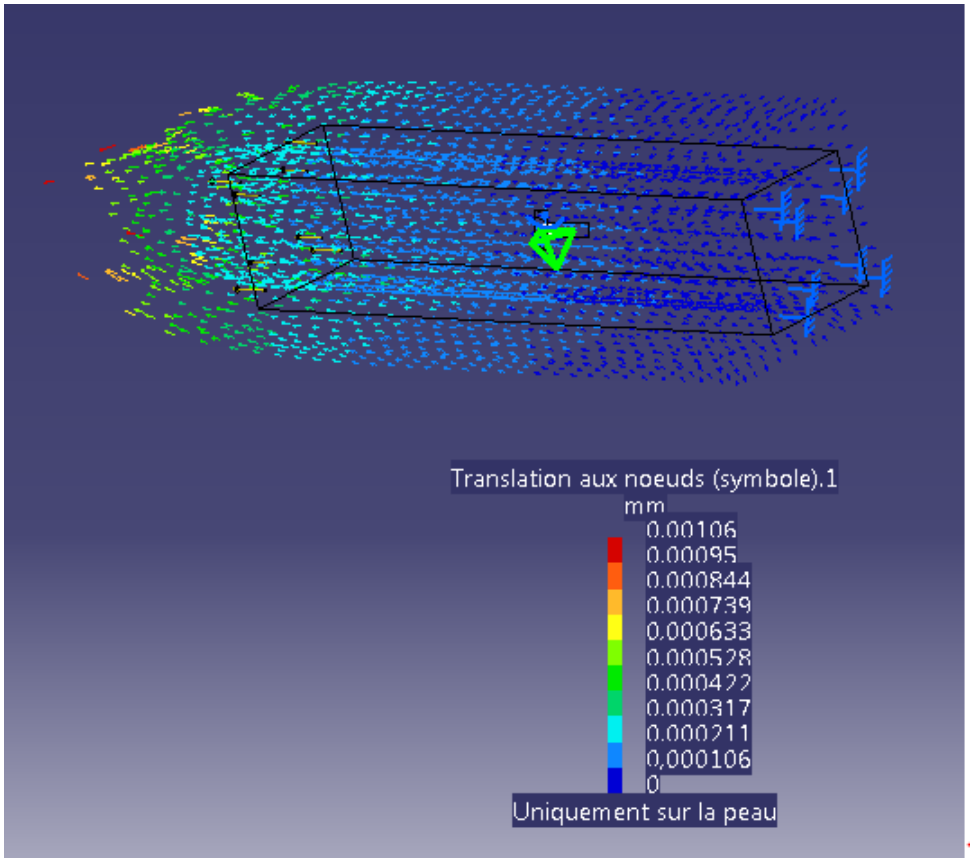


Figure.III.4. Représentation de la déformée de VER et déplacements longitudinaux

D'après le résultat obtenu par le code CATIA comparés avec les modèles analytiques, on peut constater que:

1- La valeur obtenue par MEF est délimitée par les bornes de Voigt et Reuss.

2- La valeur obtenue est également très proche de celle obtenue par le modèle Diluée.

3. Les autres modèles fournissent des valeurs plus au moins supérieures à celle fournie par CATIA.

Cette nuance de résultats peut être expliquée par le domaine d'application des modèles analytiques, qui sont destinées généralement aux structures à renfort aléatoire avec fibres courtes.

III.2.2 Volume élémentaire représentatif étendu (27 fibres)

On prend dans un deuxième cas un VER plus volumineux, la structure est renforcée cette fois-ci par 27 fibres. Ce nombre de fibre est choisi afin de maintenir la même fraction volumique de la fibre. Les propriétés mécaniques de la matrice sont les mêmes qu'au premier cas (une seule fibre). La géométrie dans le présent cas est présentée par des fibres complètement incluses dans la matrice (23 fibres), le débordement des fibres est pris en considération par des fibres semi-cylindriques (quatre fibres), Figure III.5. La taille globale de VER est : L=250 mm, b=400 mm, h = 400 mm), Figure.III.6. L'analyse est faite dans cette partie en suivant la même démarche de traitement du premier cas (préparation de la géométrie, affection des matériaux, le maillage, conditions aux limites, calcul,...).

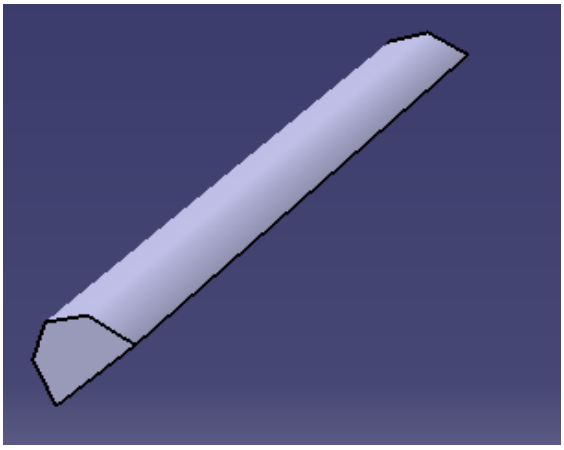


Figure.III.5 représentation d'une demie-fibre

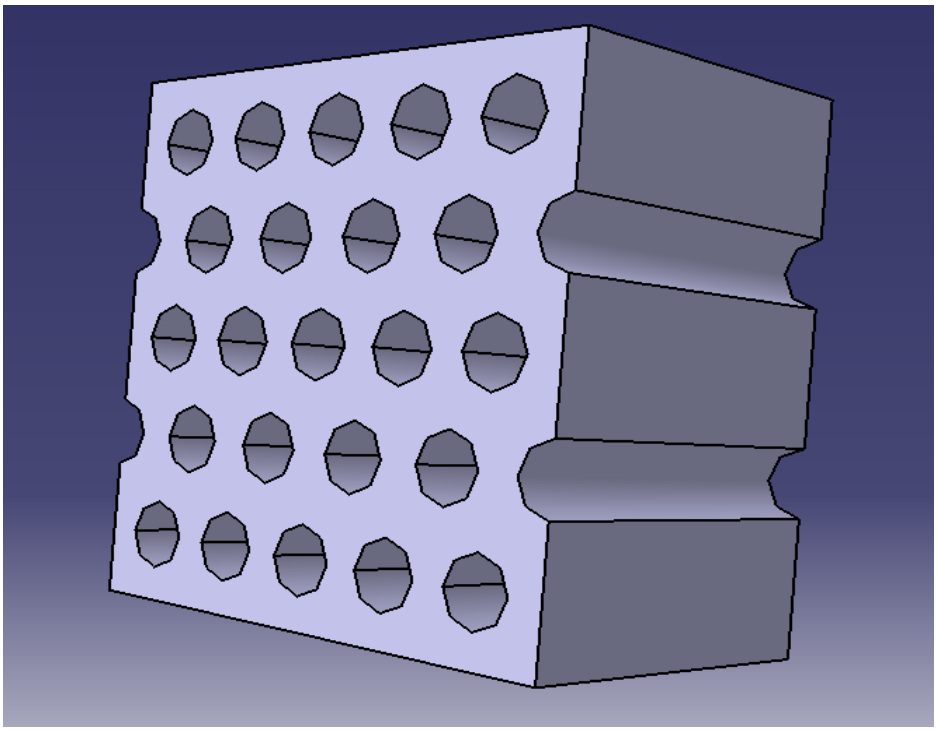


Figure III.6 Forme de la matrice creuse (27 inclusions)

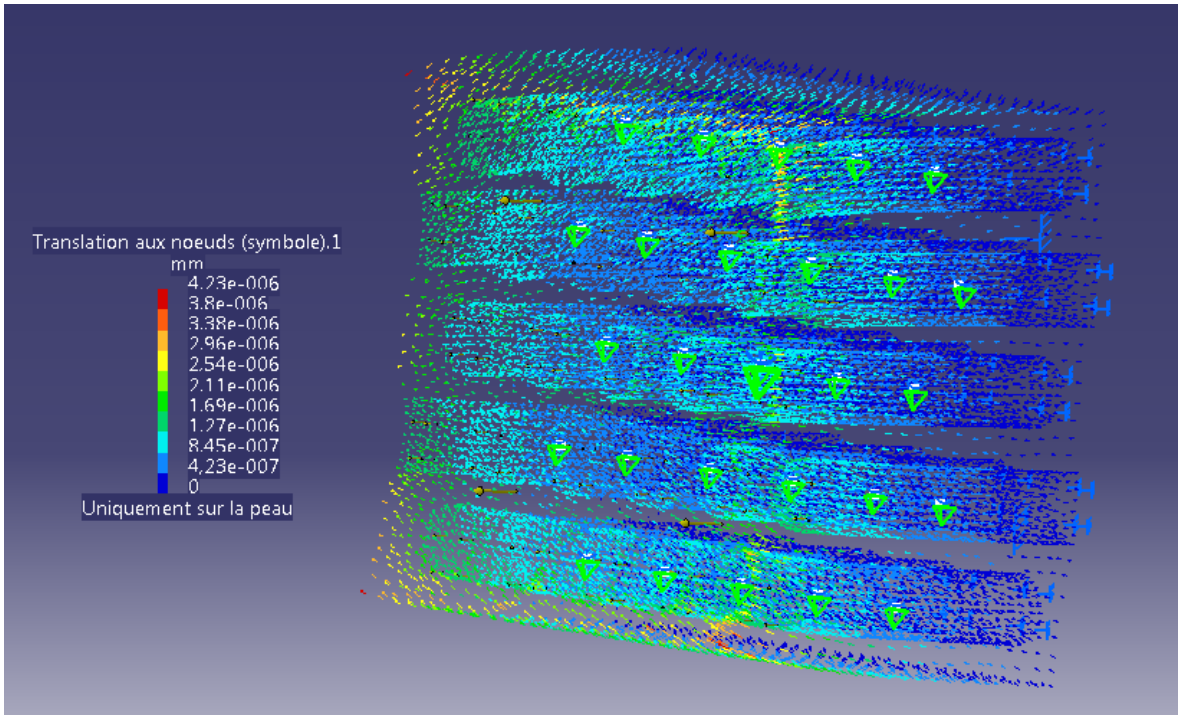


Figure.III.7 Représentation du déplacement de la structure

la simulation du comportement en traction (voir 1er cas) avec la même charge réduise le déplacement max à 4,23 10^{-6} mm. Figure.III.7

Le module de Young calculé par la loi de Hooke (Eqs. III.1, III.2 & III.3) est illustré sur le tableau III.3.

Force (N)	1
Longueur (mm)	250
Surface (mm^2)	16×10^4
Déplacement (mm)	4.23 10-6
Module de Young E (GPa)	3.69

Tableau.III.3 Paramètres liés à la loi de Hooke, module de Young, cas d'une seule fibre

Le calcul du module de Young nous montre une valeur identique à celle obtenue dans le premier cas. Cette valeur est toujours comparable aux valeurs de modèles analytiques. En effet, la taille de VER du premier cas vaut un cinquième de celui de deuxième cas. Le fait qu'on se contente par un comportement linéaire, les deux VER donnent les mêmes résultats pour une géométrie proportionnelle.

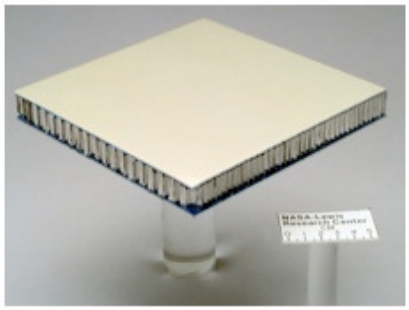
III. 3 Modélisation d'une plaque carrée sandwich sous chargement uniforme

III.3.1.Structures en sandwich :

Les pièces composites tissées ou stratifiées sont généralement minces. Par conséquent, elles ne résistent efficacement qu'aux sollicitations en membrane, c'est-à-dire leurs planes résistent mal aux sollicitations hors plan (flexion et torsion). Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich, constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une *âme* épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs (figure.III.8).

Dans la présente modélisation, on montre la faisabilité de la modélisation d'une structure sandwich. On considère ici une plaque carrée simplement supportée soumise à une charge uniformément répartie q=1 N/mm^2. La géométrie de la structure est donnée comme suit :

Longueur (L =1000 mm), Largeur (b=1000 mm), épaisseur de chaque peau (e=10 mm) L'épaisseur de l'âme est e=80mm.



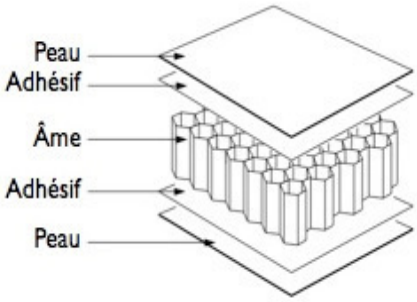


Figure.III.8 Une structure en sandwich et ses constituants.

Deux matériaux sont considérés dans cette analyse, il s'agit de l'acier pour les peaux et l'aluminium pour le cœur.

Rappelons les propriétés mécaniques de deux matériaux : E_{Acier} = 210 GPa, ν=0.3, E_{Al} = 70GPa, ν=0.346

L'étape suivante est celle de l'assemblage entre les 3 couches, figure.III.9.

La dernière étape concerne la partie analyse. Pour la réaliser, il faut définir les trois pièces (les deux peaux et le cœur) comme étant une seule pièce, pour faire ça, on a créé un contact, Le contact soudé peut assurer ce type de liaison.

Enfin, Les conditions aux limites (la force et la fixation) sont imposées sur la structure complète, figure.III.10

III.3.2 Mode de travail détaillé

- Pour faire la première partie avec Catia on doit choisir la partie dessiner
- Par la suite, on choisit le plan
- On clique sur l'icône d'esquisse
- On choisit la forme : dans notre cas, on a choisit la forme rectangle
- On doit mettre les dimensions de cette pièce en 2D avec l'icône de contrainte
- Après avoir fait et choisis les contours, on quitte cette atelier par l'icône

- On construit la forme en 3D avec l'icône
  - Notre contour est déjà en 3D, ce que nous facilite le choix de la 3eme dimension, après que la forme de la 1^{èr} pièce est établie, on attribue le matériau avec l'icône (appliquer de matériaux).
  - Après ces étapes, on obtient une pièce (une couche) avec la géométrie et le matériau qu'on a besoin. On refait les mêmes étapes pour les deux autres pièces (couches). On doit obtenir trois pièces avec un seul défini.
  - On passe maintenant à l'atelier d'assemblage en cliquant sur l'icône. Dans cette atelier, on ..... les 3 pièces avec l'icône *(composant existant)*.
  - Ensuite, on fait l'assemblage des 3 pièces, on commence par créer une contrainte de distance de deux pièces avec l'icône et la contrainte de contacte entre les deux surfaces avec l'icône, les mêmes étapes seront effectuées avec la troisième pièce (couche). Après la définition de cette pièce, on doit y aller à l'atelier d'analyse avec l'icône.
  - Dans cette partie, on peut choisir le type de maillage, la connexion d'analyse, les propriétés de connexion d'analyse, la charge et la fixation.
  - Dans mon mode, en cliquant sur l'icône pour faire la connexion générale entre les deux surfaces de ma pièce. Ensuite la propriété de connexion soudée , et la fixation définie par l'utilisateur et enfin la charge uniforme, et finalement on lance les calculs par l'icône

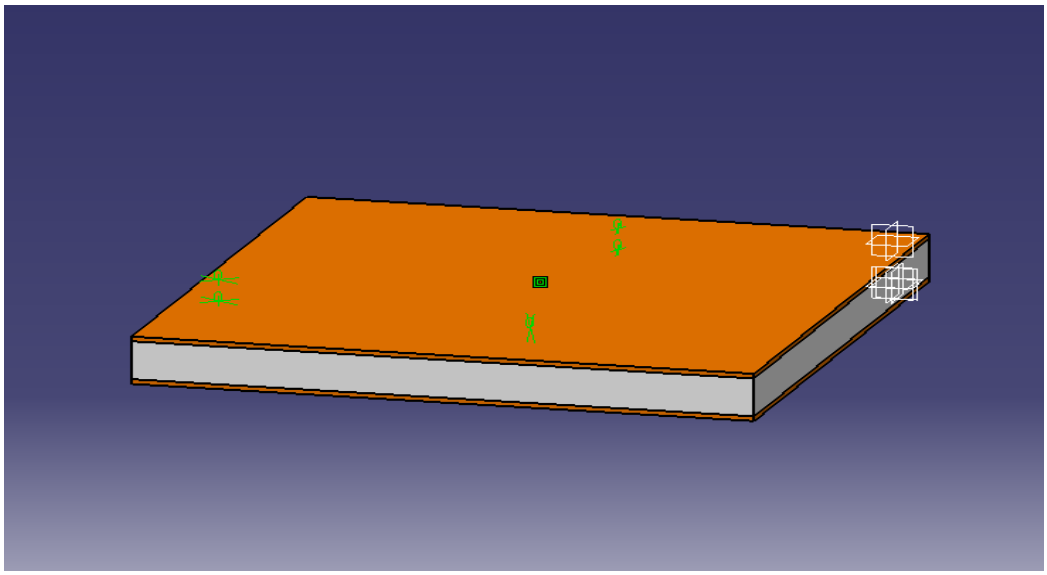


Figure.III.9.la forme sandwich

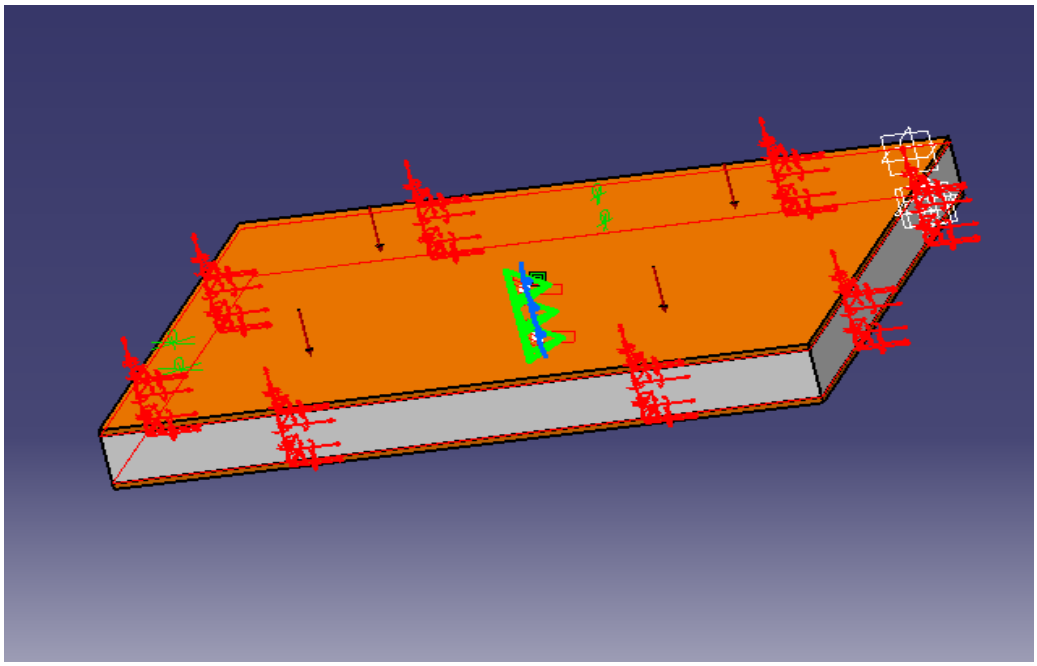


Figure.III.10.présentation des charges et des fixations

III.3.3 Présentation des résultats

Si le calcul est réussi, le poste traitement du code Catia peut nous fournir la déformée de structure, les déplacement et l'état de contraintes.

a) Déplacement (figure.III.11)

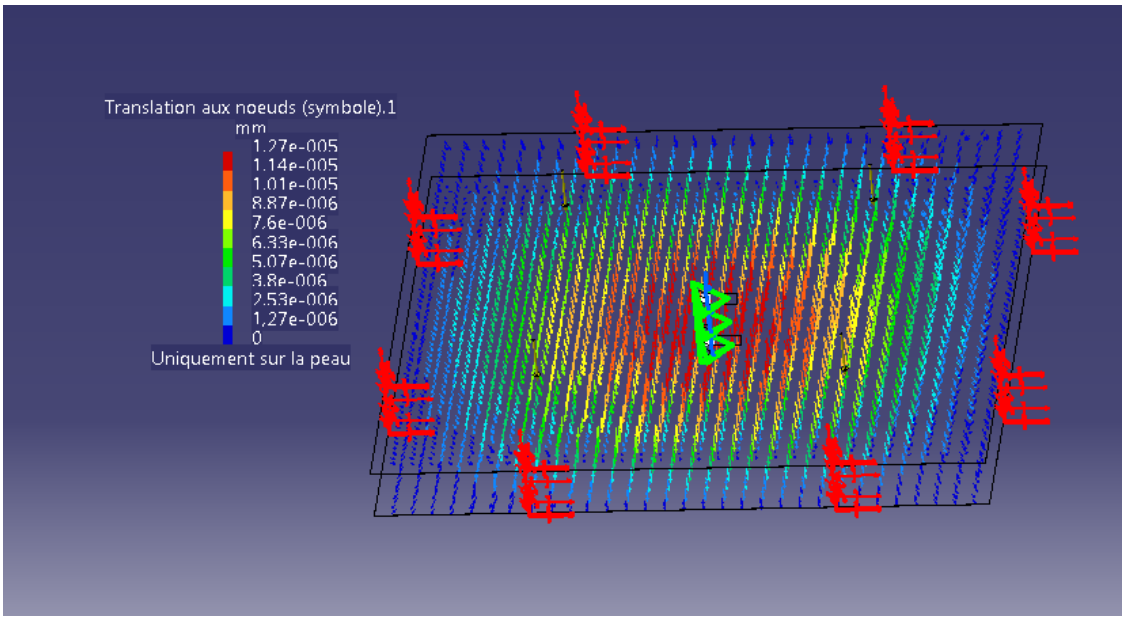


Figure.III.11 Translation aux nœuds

b) Contrainte (Figure.III.12)

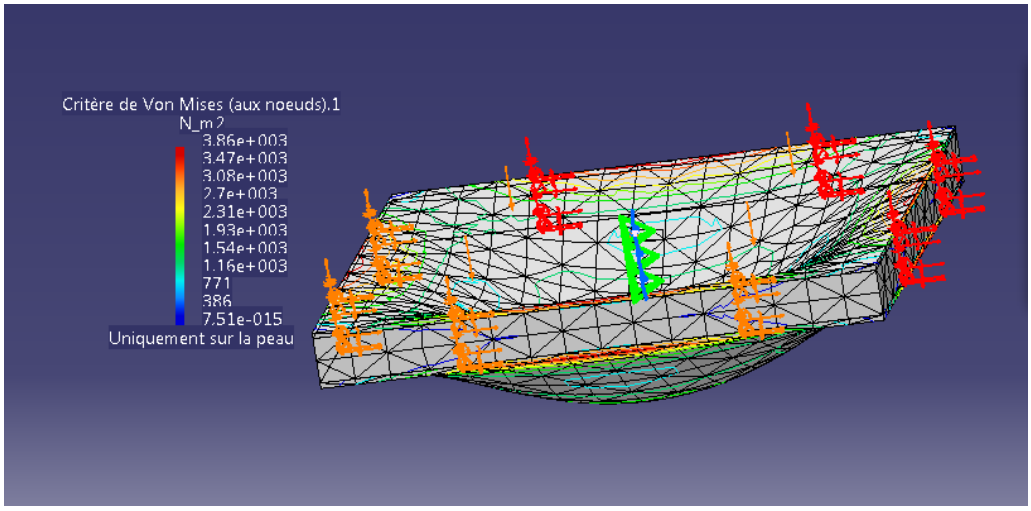


Figure.III.12 Critère de Von Mises aux nœuds

Voir le rapport de cette analyse dans annexe A1

Conclusion

La méthode des éléments finis s'est imposée dans les dernières années comme étant une méthode puissante et efficace, ce qui lui permet d'être largement utilisée dans l'analyse de comportement complexe, entre autres les structures composites et sandwichs, qui sont pratiquement difficiles à mettre en œuvre, d'où l'utilisation des outils informatiques puissants et divers programmes et des codes sont devenus indispensables.

Le code Catia offre un environnement de conception social reposant sur une source fiable et unique, accessible via de puissants tableaux de bord 3D qui aident à la décision, la conception simultanée en temps réel et la collaboration pour l'ensemble des parties prenantes, notamment les collaborateurs mobiles. Une expérience 3D intuitive, aussi bien pour les utilisateurs expérimentés que les utilisateurs occasionnels, avec des fonctionnalités de modélisation et de simulation 3D de tout premier ordre qui permettent aux utilisateurs davantage d'efficacité. Une plate-forme de développement de produit globale, facilement intégrable aux processus et aux outils existants. Plusieurs disciplines peuvent ainsi tirer parti d'applications métier puissantes et intégrées dans toutes les phases du processus de développement produit.

Le présent travail a été une contribution à la compréhension de la formulation et la modélisation des matériaux composites par la méthode des éléments finis. A cet effet, le code de calcul Catia a été présenté comme un support puissant dans l'analyse de ce types de structures. Deux objectifs sont visés: Le premier est d'initier le lecteur aux différentes opportunités offertes par Catia, le deuxième se scinde également en deux partie: i) L'homogénéisation d'un matériau composite à renfort unidimensionnel ii) L'analyse des structures composites en sandwich. Les résultats fournis par éléments finis sont confrontés avec différents modèles analytiques d'homogénéisation. Les modèles utilisés sont : modèle de Voigt, modèle de Reuss, le modèle Auto-cohérent, le modèle de Neerfeldhillfz. Les résultats obtenus montrent des valeurs identiques de deux VER et un bon compromis avec les valeurs analytiques est constaté. On a pu conclure que l'interface dédié à la modélisation des structures composites sandwich est assez riche et plein de fonctionnalités industrielles qui ne sont pas éventuellement disponibles dans d'autres codes commerciaux.

Analysis1

MAILLAGE :

Entité	Nombre
Noeuds	11513
Eléments	7856

TYPES D'ELEMENTS :

Connectivité	Statistique
TE10	5678 (72,28%)
SPIDER	2178 (27,72%)

QUALITE DES ELEMENTS :

Critère	Bon	Médiocre	Mauvais	Plus mauvais	Moyenne
Etirement	2606 (45,90%)	3072 (54,10%)	0 (0,00%)	0,203	0,424
Rapport hauteur-largeur	2589 (45,60%)	37 (0,65%)	3052 (53,75%)	9,623	5,559

Matériaux.1

Matériau :	Acier
Module d'Young	2e+011N_m2
Coefficient de Poisson	0,266
Densité	7860kg_m3
Coefficient d'expansion thermique	1,17e-005_Kdeg
Limite élastique	2,5e+008N_m2

Matériaux.2

Matériau :	Aluminium
Module d'Young	7e+010N_m2
Coefficient de Poisson	0,346
Densité	2710kg_m3
Coefficient d'expansion thermique	2,36e-005_Kdeg
Limite élastique	9,5e+007N_m2

Cas statique

Conditions aux limites

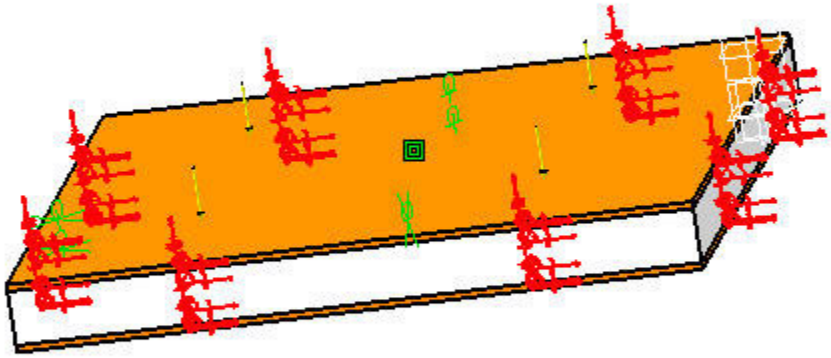


Figure A.1.1

Calcul de la STRUCTURE

Nombre de nœuds : 11513
Nombre d'éléments : 7856
Nombre de D.D.L. : 34539
Nombre de relations de contact : 0
Nombre de relations cinématiques : 6534
Nombre de coefficients : 43326

Tétraèdre parabolique : 5678
Liaison conforme solide-solide : 2178

Calcul des FIXATIONS

Nom: Fixations.1

Nombre de fixations ponctuelles : 4356

Calcul des CHARGEMENTS

Nom: Chargements.1

Résultante des forces appliquées :

Fx = -1 . 000e+002 N
Fy = -4 . 441e-014 N
Fz = 1 . 938e-014 N
Mx = -2 . 473e-014 Nxm
My = 4 . 437e+001 Nxm
Mz = -4 . 639e+001 Nxm

Calcul de la matrice de RIGIDITE

Nombre de lignes : 34539
Nombre de coefficients : 1188606
Nombre de blocs : 3
Nombre maximum de coefficients par blocs : 499997
Taille de la matrice : 13 . 73 Mb

Calcul des SINGULARITES

Fixation : Fixations.1

Nombre de singularités locales : 0
Nombre de singularités en translation : 0
Nombre de singularités en rotation : 0
Type de contraintes générées : MPC

Calcul des CONTRAINTES

Fixation : Fixations.1

Nombre de contraintes : 10890
Nombre de coefficients : 0
Nombre de contraintes factorisées : 9990
Nombre de coefficients : 32538
Nombre de contraintes vérifiées a posteriori : 0

Calcul de la FACTORISEE

Méthode : SPARSE
Nombre de degrés factorisés : 24549
Nombre de super-noeuds : 1498
Nombre de termes du canevas compresse : 248814
Nombre de coefficients : 15550278
Largeur de front maximale : 2673
Taille de front maximale : 3573801
Taille de la factorisée (Mo) : 118 . 639
Nombre de blocs : 8
Nombre de Mflops pour la factorisation : 2 . 223e+004
Nombre de Mflops pour la résolution : 6 . 232e+001
Pivot relatif minimum : 1 . 481e-002

Pivot minimum et maximum

Valeur	DDL	Noeud	x (mm)	y (mm)	z (mm)
1.3640e+009	Ty	11512	9.0000e+001	-1.8546e+002	-1.0222e+002
2.0980e+011	Tx	6589	2.0000e+001	-9.0151e+002	-7.2495e+002

Pivot minimum

Valeur	DDL	Noeud	x (mm)	y (mm)	z (mm)
1.8381e+009	Ty	11509	9.0000e+001	-1.8380e+002	-1.6023e+002
1.8436e+009	Ty	11505	8.5000e+001	-1.8214e+002	-2.2457e+002
2.0963e+009	Ty	11508	8.5000e+001	-5.8015e+001	-6.2639e+000
2.1416e+009	Tz	10620	8.5000e+001	-8.8866e+001	-2.8732e+002
2.2416e+009	Tz	10599	8.5000e+001	-5.7605e+001	-3.4990e+002
2.2429e+009	Tz	10606	8.5000e+001	-8.8972e+001	-4.1176e+002
2.2731e+009	Ty	11511	8.5000e+001	-5.2641e+002	-4.7578e+002
2.2741e+009	Ty	10614	8.5000e+001	-8.8989e+001	-3.4983e+002
2.2883e+009	Tz	10614	8.5000e+001	-8.8989e+001	-3.4983e+002

Distribution du pivot de translation

Valeur	Pourcentage
10.E9 --> 10.E10	4.8523e+001
10.E10 --> 10.E11	4.9595e+001
10.E11 --> 10.E12	1.8820e+000

Résolution par la méthode DIRECTE

Nom: Solution statique.1

Fixation : Fixations.1

Chargement : Chargements.1

Energie de déformation : 2.048e-007 J

Equilibre

Composantes	Forces Appliquées	Réactions	Résidus	Erreur Relative
Fx (N)	-1.0000e+002	1.0000e+002	-2.4272e-011	2.3575e-011
Fy (N)	-4.4409e-014	1.2845e-012	1.2401e-012	1.2045e-012
Fz (N)	1.9381e-014	-1.6747e-012	-1.6553e-012	1.6078e-012
Mx (Nxm)	-2.4732e-014	1.0788e-012	1.0541e-012	1.0621e-012
My (Nxm)	4.4367e+001	-4.4367e+001	9.0665e-012	9.1359e-012
Mz (Nxm)	-4.6392e+001	4.6392e+001	-1.1113e-011	1.1198e-011

Solution statique.1 - Maillage déformé.1

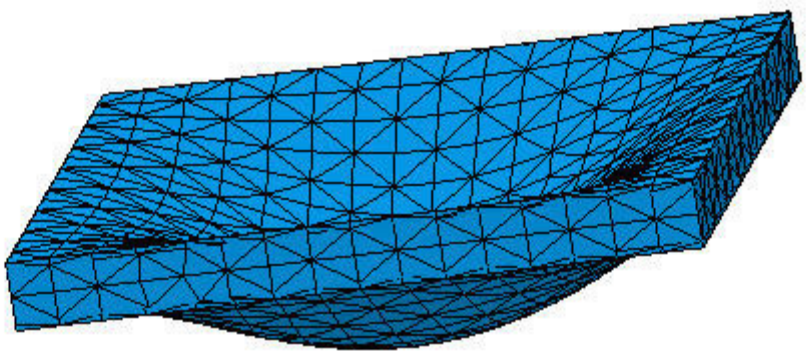


Figure A.1.2

Affichage sur la surface déformée ---- Uniquement sur la peau ---- Sur tout le modèle

Solution statique.1 - Critère de Von Mises (aux nœuds).2

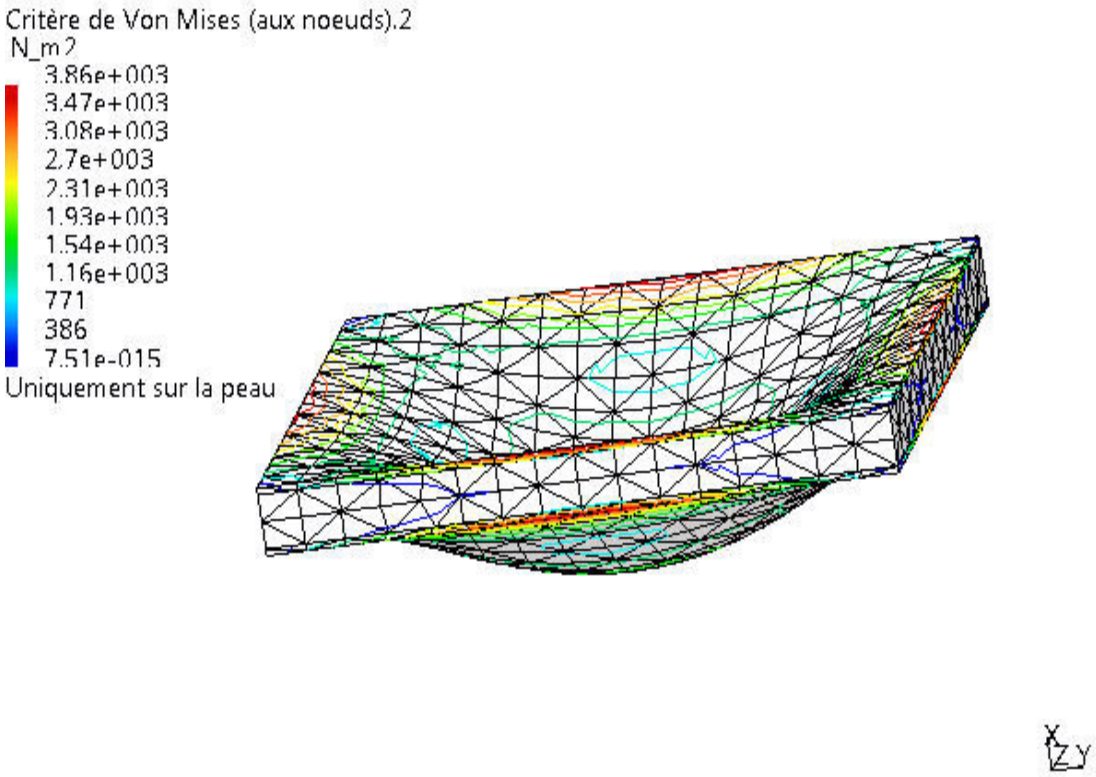


Figure A.1.3

Eléments 1D : : Composants : : Toutes

Eléments 3D : : Composants : : Toutes

Affichage sur la surface déformée ---- Uniquement sur la peau ---- Sur tout le modèle

Capteurs Globaux

Nom du Capteur	Valeur du Capteur
énergie	2,048e-007J

Références Bibliographiques

[1] Sarah.B. (2012). Projet fin de etude,(implantation de la formulation d'un element fini volumique a 8 noueds dans le code de calul Reflexe).université Biskra.

[2] Cuilliere, J.C. (2011). Introduction à la méthode des éléments finis.Edition DOC, Paris.

[3] Batoz, J. L., & Dhatt, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis: Solides élastiques* (Vol. 1). Presses Université Laval.

[4] CATIA History on Dassaut Systemes official Web Site [archive]

[5] A history of CATIA by former CEO of Dassault Systemes Francis Bernard [archive]

[6] Technological Revolution article by Dassault Aviation [archive]

[7] Philippe Escande, Dassault Systèmes : un vieux champion pour la French Tech, le monde.fr, Le Monde, 4 février 2016 (, 17 p. (lire en ligne [archive])

Résumé

Le présent travail est une contribution à la compréhension de la formulation et la modélisation des matériaux composites par la méthode des éléments finis. A cet effet, un code de calcul Catia a été présenté comme un support puissant dans l'analyse de ce types de structures. Deux objectifs sont visés: Le premier est d'initier le lecteur aux différentes opportunités offertes par Catia, le deuxième se scinde également en deux partie: i) L'homogénéisation d'un matériau composite à renfort unidimensionnel ii) L'analyse des structures composites en sandwich. Les résultats fournis par éléments finis sont confrontés avec différents modèles analytiques d'homogénéisation. Les modèles utilisés sont : modèle de Voigt, modèle de Reuss, le modèle Auto-cohérent, le modèle de Neerfeldhillfz. Les résultats obtenus montrent des valeurs identiques de deux VER et un bon compromis avec les valeurs analytiques est constaté. On a pu conclure que l'interface dédié à la modélisation des structures composites sandwich est assez riche et plein de fonctionnalités industrielles qui ne sont pas éventuellement disponibles dans d'autres codes commerciaux

يعتبر هذا العمل مساهمة لفهم صياغة و نمذجة المواد المركبة باستخدام طريقة العناصر المتناهية. ولهذه الغاية، تم تم تقديم برنامج حسابات CATIA كأرضية قوية في تحليل هذا النوع من المنشآت. تم تسطير هدفين أساسيين: يتعلق الهدف الأول بتلقين القارئ الفرص و المبادئ الأولية المتاحة من خلال البرنامج CATIA . ينقسم الهدف الثاني إلى شقين: أ) مجانسة مادة مركبة بدعم أحادي البعد ب) تحليل المنشآت مركبة على شكل "سندويتش". تمت مقارنة النتائج المتحصل عليها بواسطة العناصر المتناهية بنماذج مجانسة تحليلية. النماذج المستعلمة هي: نموذج Voigt ، نموذجReuss، نموذج"تناسق ذاتي", نموذج Neerfeldhillfz تم الحصول على نتائج متطابقة. وتناسقا لحجمين أوليين معبريين تم استعمالهما مع القيم التحليلية. يمكن أن نخلص إلى أن واجهة مخصصة لنمذجة الهياكل مركب "سندويتش" هي جد غنية متكاملة من حيث الخيارات الصناعية والتي ربما لايمكن أن تتوفر في برامج تجارية أخرى